Fonction du second degré

I Fonction polynôme du second degré

Définition :

Une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec a, b, et c des nombres réels et a $\neq 0$. Cette forme est appelée forme développée.

Exemple :

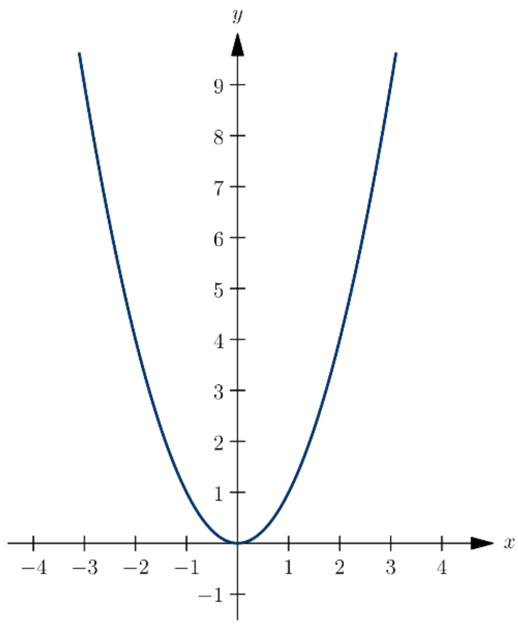
- La fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ est une fonction du second degré avec $a = 3$; $b = -2$; $c = 7$
- La fonction g définie par $g(x) = x^2$ est une fonction du second degré avec $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$

II Représentation graphique

On appelle **parabole** la courbe représentative d'une fonction du second degré.

La parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$



On détermine d'abord un tableau de valeurs de la fonction f,

pour ensuite reporter ces valeurs dans un repère orthonormé.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Remarques :

1- L'allure de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a.
Si a > 0, alors les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
Si a < 0, alors les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

2- Le **sommet S** de la parabole est le point de la parabole d'abscisse $x = -\frac{b}{2a}$

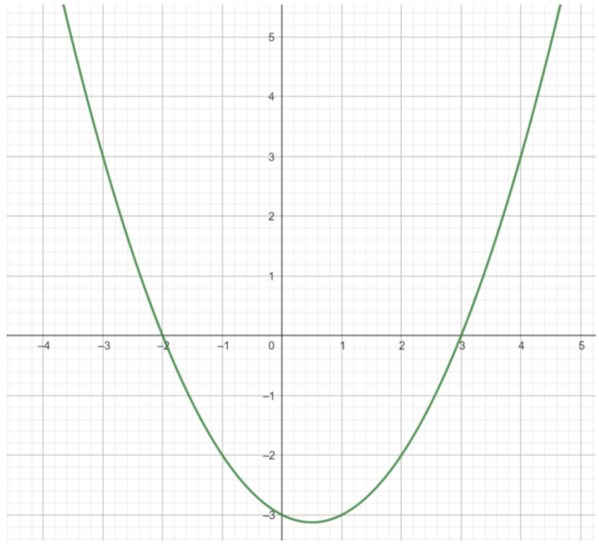
Application : Exercice 1

Propriété :

Soient a, x_1, x_2 des réels. La fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est une fonction polynôme du second degré. Cette écriture est la <u>forme factorisée</u>.

x_1 et x_2 sont appelées **racines** ou **solutions**. La parabole représentative de la fonction f coupe ainsi l'axe des abscisses aux valeurs x_1 et x_2

<u>Exemple</u> : Soit la fonction f définie par $f(x) = 0{,}5(x - 3)(x + 2)$



Propriété :

Une fonction polynôme du second degré peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Cette écriture est la <u>forme canonique</u>.

Les nombres α et β sont les coordonnées du sommet de la parabole, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$

<u>Application</u> : Exercice 2

III Sens de variation

On peut donner les variations d'une fonction du second degré par son <u>tableau de variation</u>.

- <u>Lorsque a est positif</u>

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

La valeur en laquelle le minimum est atteint est $x_{min} = -\frac{b}{2a}$. Le minimum vaut l'image de x_{min} soit $f(x_{min})$.

<u>Exemple</u> : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-1,25$	$\nearrow$	

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer $-\frac{b}{2a} = 1,5$; $f(-1) = 5$; $f(1,5) = -1,25$ et $f(4) = 5.$

On dit alors que f admet un minimum égal à $-1,25$ pour $x = 1,5$.

- <u>Lorsque a est négatif</u>

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

<u>Exemple</u> : Soit la fonction g définie sur l'intervalle par $g(x) = -0,5x^2 + 2x + 3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer $-\frac{b}{2a} = 2$; $g(-2) = -3$; $g(2) = 5$ et $g(6) = -3.$

On dit alors que g admet un maximum égal à 5 pour $x = 2$.

<u>Application</u> : Exercice 3

<u>IV Résolution d'une équation du second degré</u>

<u>Méthode</u> :

1/ Pour trouver les solutions à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ il faut calculer le **discriminant**.

Ce nombre se nomme Delta, il est noté Δ et on le calcule en utilisant la formule $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

2/ Le nombre de solutions de l'équation dépend de Δ :

- <u>Si $\Delta > \mathbf{0}$</u> alors l'équation admet <u>deux solutions</u> :

  $\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

- <u>Si $\Delta = \mathbf{0}$</u> alors l'équation admet <u>une unique solution</u> :

  $\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}$

- <u>Si $\Delta < \mathbf{0}$</u> alors l'équation n'admet <u>aucune solution</u>

Exemple :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

1/ On calcule d'abord le discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)$

$\Delta = 9 + 16$

$\Delta = 25$

2/ On regarde le signe du discriminant.

$\Delta > 0$ puisque $\Delta = 25$

L'équation a donc deux solutions :

$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{(2*2)} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{(2*2)} = \frac{3+5}{4} = 2$

Les solutions de l'équation sont donc $-\frac{1}{2}$ et 2

Remarque : Graphiquement, les solutions d'une équation du second degré sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction et l'axe des abscisses.

Application : Exercice 4

V Signe d'une fonction du second degré

Soit f une fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, et c des nombres réels et a$\neq 0$.

On calcule son discriminant :

- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ a le même signe que a.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ a le même signe que a et s'annule en $-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2 et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Remarque : On dit que le signe de a est à l'extérieur des racines (solutions)

Exemple :

Soit $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

- On calcule son discriminant :
  $\Delta = b^2 - 4ac$
  $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6$
  $\Delta = 64$

- On peut alors calculer les solutions (racines) de la fonction :
  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times(-2)} = -1$
  $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-2)} = 3$

- Enfin, on peut dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$		$-$	

Application : Exercice 5