Corrigé du BTS Comptabilité et gestion [1]
Polynésie - 13 mai 2019

Exercice 1 **9 points**

La société « RADIALTOP » fabrique des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu hiver » et la catégorie « pneu 4 saisons ».
Pour améliorer la sécurité, le fabriquant effectue des tests de qualité :
Parmi les pneus hiver, 96 % ont réussi les tests de qualité.
Parmi les pneus 4 saisons, 97 % ont réussi les tests de qualité.
Le site de vente en ligne de pneumatiques « PNEUTOP » dispose de pneus venant de ce fabriquant.

Partie A

Le responsable du site « PNEUTOP » commande en début de mois 150 pneus hiver afin de reconstituer son stock.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 150 pneus hiver chez le fabriquant associe le nombre de pneus hiver n'ayant pas réussi le test qualité.
Le stock de la société « RADIALTOP » est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. La probabilité qu'un pneu hiver ne réussisse pas son contrôle de qualité est $p = 1 - 0,96 = 0,04$.
   Le stock de la société « RADIALTOP » est assez important pour assimiler le prélèvement de 150 pneus à un tirage avec remise; on a donc une répétition de $n = 150$ épreuves identiques qui n'ont que 2 issues.
   Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de pneus n'ayant pas réussi le test de contrôle suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,04$.
2. La probabilité pour que, dans le lot reçu par le responsable du site, il y ait exactement cinq pneus hiver n'ayant pas réussi le contrôle qualité est :
   $P(X = 5) = \binom{150}{5} 0,04^5\,(1 - 0,04)^{150-5} \approx 0,163$.
3. La probabilité pour que le lot reçu par le responsable du site contienne au moins dix pneus hiver n'ayant pas réussi le contrôle qualité est : $P(X \geqslant 10) \approx 0,080$.

Partie B

Un client commande un pneu sur le site « PNEUTOP ».
On dispose de l'information supplémentaire suivante sur le stock de pneus du site :

25 % des commandes concernent les pneus hiver.

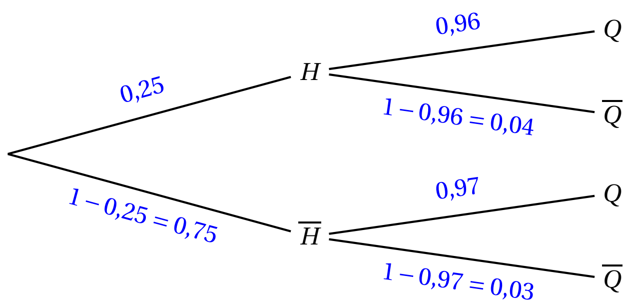
On rappelle que :
- parmi les pneus hiver, 96 % ont réussi les tests de qualité;
- parmi les pneus 4 saisons, 97 % ont réussi les tests de qualité.

On note :
- H l'évènement : « Le pneu commandé par le client est un pneu hiver »;
- Q l'évènement : « Le pneu commandé par le client a réussi les tests de qualité ».

1. Candidats libres

1. **a.** On sait que 25 % des commandes concernent les pneus hiver donc $P(H) = 0,25$.
   Parmi les pneus hiver, 96 % ont réussi les tests de qualité donc $P_H(Q) = 0,96$.

   b. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilité.



2. **a.** La probabilité de l'évènement $H \cap Q$ est
   $P(H \cap Q) = P(H) \times P_H(Q) = 0,25 \times 0,96 = 0,24$.

   b. Il y a une probabilité de 0,24 que le pneu commandé par le client soit un pneu hiver ET qu'il ait réussi le test de qualité.

3. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(Q) = P(H \cap Q) + P\left(\overline{H} \cap Q\right) = 0,24 + 0,75 \times 0,97 = 0,9675$

4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, la probabilité que ce pneu soit un pneu hiver est : $P_Q(H) = \dfrac{P(H \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0,24}{0,9675} \approx 0,248$

Partie C

On admet que le nombre de pneus 4 saisons vendus par mois par le site « PNEUTOP » peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 450$ et d'écart type $\sigma = 15$.

1. **a.** À la calculatrice, on trouve $P(435 \leqslant Y \leqslant 465) \approx 0,68$.

   b. On peut en déduire qu'il y a environ 68 % de chance de vendre entre 435 et 465 pneux 4 saison par mois.

2. Le responsable du site veut connaître le nombre n de pneus 4 saisons qu'il doit avoir en stock en début de mois pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05.
   On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $P(Y > n) < 0,05$.
   La calculatrice donne la valeur de $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$; on va donc chercher la plus petite valeur de n telle que $P(Y \leqslant n) \geqslant 0,95$.
   On procède par approximations successives :

n	$P(Y \leqslant n)$	conclusion
470	0,909	trop petit
480	0,977	trop grand
475	0,952	trop grand
474	0,945	trop petit

Le responsable du site doit avoir au moins 475 pneus 4 saisons en stock en début de mois pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05.

Exercice 2 **6 points**

La feuille de calcul ci-dessous donne les prix du m^2 des appartements dans le 19^e arrondissement de Paris du 1er trimestre 2016 au 1er trimestre 2018.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		1er trimestre 2016	2^e trimestre 2016	3^e trimestre 2016	4^e trimestre 2016	1er trimestre 2017	2^e trimestre 2017	3^e trimestre 2017	4^e trimestre 2017	1er trimestre 2018
2	Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	Prix moyen du m^2 en euros (y_i)	6 280	6 480	6 860	6 720	6 790	6 940	7 050	7 360	7 350

Source : http ://www.notaires.paris-idf.fr/outil /immobilier/prix-et-nombre-de-ventes-paris-idf
Chiffres de la chambre des notaires de Paris. Prix standardisés au m^2.
Appartements anciens, vendus libres, de gré à gré, en pleine propriété, à usage d'habitation.

Partie A

1. Le taux d'évolution global du prix moyen du m^2 entre le 1er trimestre 2016 et le 1er trimestre 2018 est, arrondi à 0,01 %, de $\left(\dfrac{7350}{6280}-1\right)\times 100$ soit 17,04 %.

2. Il y a 8 trimestres entre le 1er trimestre 2016 et le 1er trimestre 2018, donc le taux moyen trimestriel d'évolution du prix du m^2 entre le 1er trimestre 2016 et le 1er trimestre 2018, arrondi à 0,01 %, est égal $\left(\left(\dfrac{7350}{6280}\right)^{\frac{1}{8}}-1\right)\times 100$ soit 1,99 %.

3. Entre le 1er trimestre 2018 et le 3^e trimestre de 2019, il y a 6 trimestres.

Augmenter de 1,99 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{1,99}{100}=1,0199$.

Augmenter trimestriellement de 1,99 % pendant 6 trimestres, c'est multiplier par $1,0199^6$.

Le prix du m^2 arrondi à l'unité au troisième trimestre 2019 sera donc de $7350\times 1,0199^6$ soit 8 272 euros.

Partie B

Dans le tableau précédent, x_i désigne le rang du trimestre mesuré à partir de l'année 2016 et y_i le prix moyen du m^2 en euros correspondant.

1. On détermine une équation de la droite de régression de y en x de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ obtenue par la méthode des moindres carrés : $y=125,3x+6243,3$.

2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y=125x+6243$. On admet que ce modèle reste valable jusqu'en 2020.

a. Le 3^e trimestre 2019 correspond au rang $x=9+6=15$.

Pour $x=15$, on a $y=125\times 15+6243=8118$.

Donc on peut estimer le prix du m^2 au troisième trimestre 2019 à 8 118 euros.

b. Déterminer le prix du m^2 va dépasser 8 272 €, revient à déterminer le rang x pour lequel $y>8272$.

$y>8272 \iff 125x+6243>8272 \iff 125x>2029 \iff x>\dfrac{2029}{125} \iff x>16,232$

Le prix du m^2 va dépasser 8 272 € le trimestre de rang 17 donc le 1er trimestre 2020.

Exercice 3 **5 points**

Une entreprise fabrique des cafetières. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque mois x milliers de cafetières (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,5]$), alors le bénéfice mensuel est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,5]$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.

a. Pour tout réel x de $[0\,;\,5]$, $f'(x) = 8\,\mathrm{e}^{-x} + (8x-2)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (8-8x+2)\,\mathrm{e}^{-x} = (-8x+10)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-8x+10)$ donc s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$.

$f(0) = -2$; $f(1{,}25) \approx 2{,}3$; $f(5) \approx 0{,}26$

On établit le tableau des variations de f sur $[0\,;\,5]$:

x	0		$1{,}25$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\approx 2{,}3$	$\searrow$	$\approx 0{,}26$

2. a. La fonction f admet un maximum pour $x = 1{,}25$, donc l'entreprise doit fabriquer 1,25 milliers de cafetières, soit 1 250, afin de réaliser un bénéfice maximal.

b. La valeur de ce bénéfice maximal est alors, en euros, de $f(1{,}25) \times 100\,000 \approx 229\,204$.