

# FONCTION DU SECOND DEGRE

## Activité découverte

### I Fonction polynôme du second degré

#### Définition :

Une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec  $a$ ,  $b$ , et  $c$  des nombres réels et  $a \neq 0$ . Cette forme est appelée forme développée.

#### Exemple :

- La fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$  est une fonction du second degré avec  $a = 3$ ;  $b = -2$ ;  $c = 7$
- La fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^2$  est une fonction du second degré avec  $a = 1$ ;  $b = 0$ ;  $c = 0$

### II Représentation graphique

On appelle parabole la courbe représentative d'une fonction du second degré.

La parabole a pour équation  $y = ax^2 + bx + c$

Exemple : Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2$

On détermine d'abord un tableau de valeurs de la fonction  $f$ , pour ensuite reporter ces valeurs dans un repère orthonormé.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

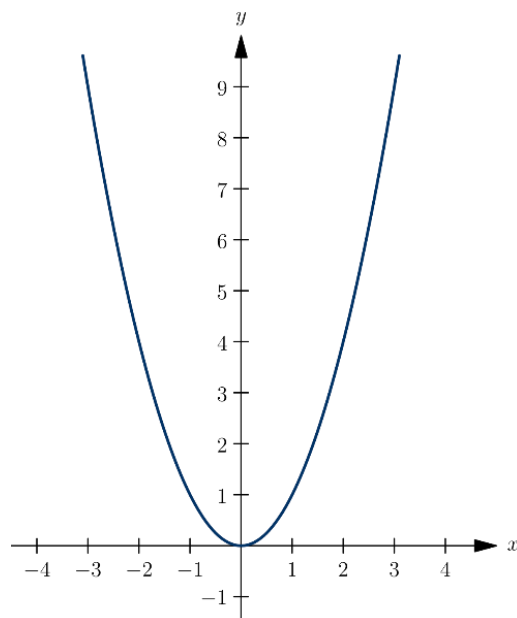
#### Remarques :

1- L'allure de la parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  dépend du signe de  $a$ .

Si  $a > 0$ , alors les branches de la parabole sont tournées vers le haut.

Si  $a < 0$ , alors les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

2- Le **sommet S** de la parabole est le point de la parabole d'abscisse  $x = -\frac{b}{2a}$



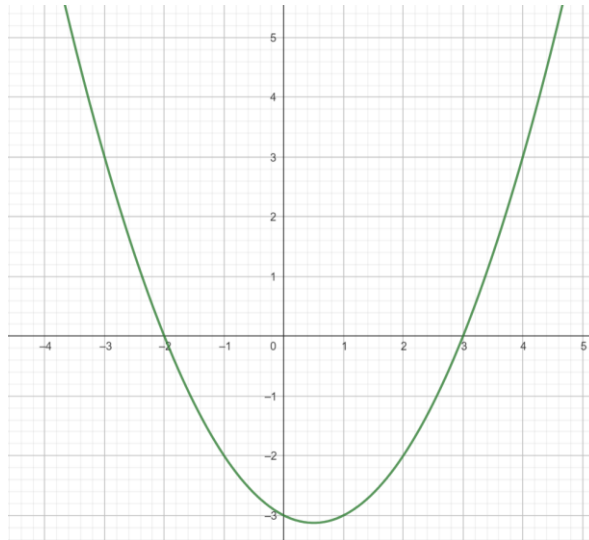
Application : Exercice 1

### Propriété :

Soient  $a, x_1, x_2$  des réels. La fonction  $f$  définie par  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  est une fonction polynôme du second degré. Cette écriture est la forme factorisée.

$x_1$  et  $x_2$  sont appelées **racines** ou **solutions**. La parabole représentative de la fonction  $f$  coupe ainsi l'axe des abscisses aux valeurs  $x_1$  et  $x_2$

Exemple : Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 0,5(x - 3)(x + 2)$



### Propriété :

Une fonction polynôme du second degré peut aussi s'écrire sous la forme  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

Cette écriture est la forme canonique.

Les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées du sommet de la parabole, avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$

Application : Exercice 2

## III Sens de variation

On peut donner les variations d'une fonction du second degré par son tableau de variation.

- Lorsque a est positif

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘ ↗		

La valeur en laquelle le minimum est atteint est  $x_{min} = -\frac{b}{2a}$ . Le minimum vaut l'image de  $x_{min}$  soit  $f(x_{min})$ .

Exemple : Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-1 ; 4]$  par  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

$x$	-1	1,5	4
$f(x)$	5	-1,25	5

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer  $-\frac{b}{2a} = 1,5$  ;  $f(-1) = 5$  ;  $f(1,5) = -1,25$  et  $f(4) = 5$ .

On dit alors que  $f$  admet un minimum égal à  $-1,25$  pour  $x = 1,5$ .

- Lorsque  $a$  est négatif

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

Exemple : Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[-2 ; 6]$  par  $g(x) = -0,5x^2 + 2x + 3$

$x$	-2	2	6
$g(x)$	-3	5	-3

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer  $-\frac{b}{2a} = 2$  ;  $g(-2) = -3$  ;  $g(2) = 5$  et  $g(6) = -3$ .

On dit alors que  $g$  admet un maximum égal à 5 pour  $x = 2$ .

Application : Exercice 3

## IV Résolution d'une équation du second degré

### Méthode :

1/ Pour trouver les solutions à une équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  il faut calculer le discriminant.

Ce nombre se nomme Delta, il est noté  $\Delta$  et on le calcule en utilisant la formule  $\Delta = b^2 - 4ac$

2/ Le nombre de solutions de l'équation dépend de  $\Delta$  :

- **Si  $\Delta > 0$**  alors l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **Si  $\Delta = 0$**  alors l'équation admet une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- **Si  $\Delta < 0$**  alors l'équation n'admet aucune solution

### Exemple :

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

1/ On calcule d'abord le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)$$

$$\Delta = 9 + 16$$

$$\Delta = 25$$

2/ On regarde le signe du discriminant.

$\Delta > 0$  puisque  $\Delta = 25$

L'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{(2 \times 2)} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{(2 \times 2)} = \frac{3+5}{4} = 2$$

Les solutions de l'équation sont donc  $-\frac{1}{2}$  et  $2$

Remarque : Graphiquement, les solutions d'une équation du second degré sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction et l'axe des abscisses.

Application : Exercice 4

## V Signe d'une fonction du second degré

Soit  $f$  une fonction du second degré définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a$ ,  $b$ , et  $c$  des nombres réels et  $a \neq 0$ .

On calcule son discriminant :

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $f(x)$  a le même signe que  $a$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $f(x)$  a le même signe que  $a$  et s'annule en  $-\frac{b}{2a}$
- Si  $\Delta > 0$ , alors  $f(x)$  s'annule en deux réels distincts  $x_1$  et  $x_2$  et on obtient le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $(-a)$	0	signe de $a$

Remarque : On dit que le signe de  $a$  est à l'extérieur des racines (solutions)

Exemple :

Soit  $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

- On calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6$$

$$\Delta = 64$$

- On peut alors calculer les solutions (racines) de la fonction :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times (-2)} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times (-2)} = 3$$

- Enfin, on peut dresser le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Application : Exercice 5