Variables aléatoires (Exercices)

Exercice 1

Des étudiants jouent avec un jeu de 32 cartes et mettent en place des règles bien précises :

- Si la carte obtenue est un nombre, ils obtiennent 5 points.
- Si la carte obtenue est un roi, une dame ou un valet, ils obtiennent 8 points.
- Si la carte obtenue est un as, ils perdent 10 points.

On désigne par X la variable aléatoire donnant les points de chaque étudiant.

1/ Combien y a-t-il d'issues possibles dans cette expérience aléatoire ?

2/ Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

Exercice 2

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer $P(X \geq 2)$ et interpréter le résultat.

Exercice 3

Un magasin commercialise des canapés et des tables de salon. Quand un client se présente, il achète au plus un canapé et au plus une table de salon. Une étude a montré que :

- la probabilité pour qu'un client achète un canapé est 0,24
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il a acheté un canapé est 0,25
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il n'achète pas de canapé est 0,1.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- C l'événement « le client achète un canapé » et $\bar{C}$ son événement contraire
- T l'événement « le client achète une table de salon » et $\bar{T}$ son événement contraire.

1/ Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2/ Calculer la probabilité que le client achète un canapé et une table de salon.

3/ Montrer que la probabilité $p(T)$ est égale à 0,136.

4/ Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et le prix moyen d'une table de salon est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondante à la somme payée par le client.

Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	0	300	1000	1300
$P(X = x_i)$				

5/ Calculer l'espérance de la variable aléatoire X

Exercice 4

À un jeu de grattage, 4 500 000 tickets sont émis et vendus chacun au prix de 2 €. Chaque ticket permet de remporter ou non un gain. Les différents gains sont répartis ainsi :

Montant du gain en €	25 000 €	1 000 €	100 €	20 €	10 €	4 €	2 €
Nombre de tickets	3	8	600	75 000	130 000	505 504	599 992

Un joueur achète un ticket au hasard chez un buraliste. On note G la variable aléatoire égale au gain réel du joueur ($gain\ brut\ -\ mise$).

1/ Préciser les valeurs prises par G.

2/ Déterminer la loi de probabilité de G (les probabilités seront données sous forme de fractions).

3/ Montrer que, la probabilité que le joueur gagne réellement de l'argent en jouant à ce jeu est de 0,158.

4/ Un autre joueur décide d'acheter deux tickets de ce jeu au hasard. On rappelle que la probabilité de gagner réellement de l'argent en jouant à ce jeu est de 0,158. On note S l'évènement « le ticket acheté permet de gagner de l'argent ».

a/ Traduire la situation par un arbre de probabilité.

b/ Déterminer la probabilité que ce joueur ait acheté deux tickets lui permettant de gagner réellement de l'argent. Arrondir au millième.

Exercice 5

Antonella prend tous les jours sa voiture pour se rendre au travail. Elle rencontre sur son trajet 3 feux tricolores qui fonctionnent tous les trois de la même manière et de façon indépendante.

Des relevés statistiques ont permis d'établir que pour chaque feu :

- la probabilité qu'il soit vert lorsqu'Antonella s'y présente est égale à 0,6

- La probabilité qu'il soit orange lorsqu'Antonella s'y présente est égale à $0{,}1$
- La probabilité qu'il soit rouge lorsqu'Antonelle s'y présente est égale à $0{,}3$

V désigne l'événement : "le feu est vert" et $\bar{V}$ l'événement contraire.

1/ Illustrer par un arbre de probabilités l'expérience aléatoire consistant à rencontrer successivement les trois feux.

2/ Quelle est la probabilité qu'Antonella rencontre 3 feux verts ?

3/ Quelle est la probabilité qu'Antonella rencontre au moins un feu vert ?

La collègue d'Antonella qui fait du covoiturage avec elle lui propose un jeu :

- Si le feu est vert, Antonella gagne 5 euros
- Si le feu est rouge, Antonella perd 7 euros
- Si le feu est orange, Antonelle ne gagne rien mais ne perd rien non plus.

Soit la variable aléatoire X qui associe la couleur du feu à l'argent gagné ou perdu.

4/ Déterminer la loi de probabilité de X.

5/ Calculer $P(X \geq 5)$ et interpréter le résultat.

6/ Calculer l'espérance de la variable aléatoire X

7/ Calculer la variance de la variable aléatoire X

8/ Calculer l'écart-type de la variable aléatoire X

Exercice 6

Une entreprise fabrique des brioches de poids standard $700\ g$.

Si une brioche pèse entre $700\ g$ et $720\ g$, elle est vendue au prix de 3 €. Sinon, elle est vendue dans des magasins à prix cassés à :

- 2 € si elle pèse plus de $720\ g$
- $1{,}50$ € si elle pèse moins de $700\ g$

On sait que :

- 80% des brioches ont une masse comprise entre $700\ g$ et $720\ g$
- 15% des brioches ont une masse inférieure à $700\ g$
- 5% des brioches ont une masse supérieure à $720\ g$

On note X la variable aléatoire qui, à chaque brioche tirée au hasard, associe son prix de vente.

1/ Quelles sont les valeurs prises par X ?

2/ Déterminer la loi de probabilité de X.

3/ Calculer $E(X)$.

4/ Interpréter le résultat.

5/ Calculer la variance de la variable aléatoire X

6/ Calculer l'écart-type de la variable aléatoire X