Calcul des propositions et des prédicats

L'objectif est d'introduire quelques éléments logiques en lien avec l'informatique.

Le langage formel informatique est, entre autres, constitué d'un alphabet qui lui est propre, tout comme les règles de formations des formules et des preuves constituées à partir de cet alphabet.

On est alors conduit à introduire des propositions et des prédicats.

I Calcul propositionnel

1- Proposition

Définition :

Une **proposition** a un sens dans la théorie où l'on se place.

A toute proposition, on peut associer une valeur de vérité, soit vrai (noté V ou 1), soit faux (noté F ou 0).

Exemple : Considérons les trois énoncés suivants A, B, C concernant des nombres entiers.

- A : $2^{10} = 1024$
- B : $5 < 4$
- C : 3 est un nombre impair.

Le contenu de A est vrai, celui de B est faux, et celui de C est vrai. A, B, et C sont trois exemples de propositions arithmétiques.

Remarque : En mathématiques, sauf exception, on n'écrit que des propositions vraies ; lorsqu'on est amené à considérer une proposition fausse, on le précise.

2- Négation

Définition :

A toute proposition P, on peut associer une nouvelle proposition, notée $\neg P$ ou $\overline{P}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	$\neg P$
1	0
0	1

$\neg P$ est la **négation** de P et se lit « non P »

$\neg$ est le **connecteur négation**.

Exemple : Reprenons les mêmes propositions A, B et C.

A partir de la proposition A : $2^{10} = 1024$ dont la valeur de vérité est V (ou 1), on peut définir la nouvelle proposition $2^{10} \neq 1024$ dont la valeur de vérité est F (ou 0).

De même, à partir de la proposition B : $5 < 4$ dont la valeur de vérité est F (ou 0), on peut définir la nouvelle proposition $5 \geq 4$ dont la valeur de vérité est V (ou 1).

Enfin, à partir de la proposition C : 3 est un nombre impair dont la valeur de vérité est V (ou 1), on peut définir la nouvelle proposition « 3 est un nombre pair » dont la valeur de vérité est F (ou 0).

Remarques :

- La négation est un **connecteur unaire** car elle agit sur une seule proposition.
- On peut définir des **connecteurs binaires** qui associent à deux propositions une nouvelle proposition.

3- Conjonction

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), la **conjonction** associe la proposition, notée $P \wedge Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \wedge Q$ se lit « P et Q »

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \wedge B : 2^{10} = 1024$ et $5 < 4$ est une proposition fausse car B est faux.

$A \wedge C : 2^{10} = 1024$ et 3 est un nombre impair est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Remarque : En français le mot « et » exprime parfois une succession d'évènements dans le temps. Il peut être remplacé par « puis ».

Cette extension du sens du mot n'est pas valable en logique mathématique et en informatique.

4- Disjonction

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), la **disjonction** associe la proposition, notée $P \vee Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \vee Q$ se lit « P ou Q »

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \vee B : 2^{10} = 1024$ ou $5 < 4$ est une proposition vraie car A est vrai.

$A \vee C : 2^{10} = 1024$ ou 3 est un nombre impair est une proposition vraie.

Remarque : Le « ou » est inclusif, c'est-à-dire l'un ou l'autre est possible pour que ce soit vrai.

5- Implication

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), la **disjonction** associe la proposition, notée $P \Rightarrow \mathrm{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \Rightarrow \mathrm{Q}$ se lit « P implique Q »

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \Rightarrow \mathrm{B} : 2^{10} = 1024 \Rightarrow 5 < 4$ est une proposition fausse car A est vrai et B est faux.

$A \Rightarrow \mathrm{C} : 2^{10} = 1024 \Rightarrow$ 3 est un nombre impair est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Remarque : Généralement en mathématiques, on utilise l'implication pour des raisonnements du type « Si P est vrai, alors Q … », où P est l'hypothèse et Q est la conclusion. On peut également faire des raisonnements par l'absurde « Si P est faux, alors Q… »

6- Equivalence

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), **l'équivalence** associe la proposition, notée $P \Leftrightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q »

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \Leftrightarrow B : 2^{10} = 1024 \Leftrightarrow 5 < 4$ est une proposition fausse car A est vrai mais B est faux.

$A \Leftrightarrow C : 2^{10} = 1024 \Leftrightarrow$ 3 est un nombre impair est une proposition vraie car A et C sont vrais.

7- Premières propriétés des connecteurs

a- Commutativité de ∨ et ∧

Propriétés :

Pour toutes propositions (P, Q),

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Démonstration : Si l'on permute l'ordre des propositions dans $P \wedge Q$, alors on permute la $2^{\text{ème}}$ et la $3^{\text{ème}}$ ligne de la table de vérité de la conjonction, ce qui ne change rien sur la colonne de droite.

Les propositions $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ ont donc la même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La démonstration est analogue pour la disjonction.

b- Double distributivité

Propriétés :

Pour toutes propositions (P, Q, R),

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Application : Exercice 3

Démonstration : Construisons la table de vérité des propositions situées de part et d'autre de l'équivalence.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux propositions ont donc la même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La démonstration est analogue pour la seconde équivalence.

c- Elément neutre

Propriété :

Soit $\mathcal{V}$ une proposition toujours vraie, et $\mathcal{F}$ une proposition fausse.

Pour toute proposition P, $P \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow P$ et $P \vee \mathcal{V} \Leftrightarrow P$

P	$\mathcal{F}$	$P \vee \mathcal{F}$
1	0	1
0	0	0

P	$\mathcal{V}$	$P \vee \mathcal{V}$
1	1	1
0	1	0

Remarque : Une proposition vraie quel que soit ses composants est appelée une **tautologie**.

d- Tiers exclu et non-contradiction.

Propriétés :

Pour toute proposition P,

$P \vee (\neg P) \Leftrightarrow \mathcal{V}$,

$P \wedge (\neg P) \Leftrightarrow \mathcal{F}$,

où $\mathcal{V}$ est une proposition toujours vraie et $\mathcal{F}$ une proposition toujours fausse.

P	$\neg P$	$P \vee (\neg P)$
1	0	1
0	1	1

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$
1	0	0
0	1	0

e- Implication et équivalence

Propriétés :

Pour toutes propositions P, Q,

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$,

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\big)$,

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

La première équivalence permet de définir l'implication à partir des deux connecteurs négation et disjonction.

La deuxième équivalence justifie que certaines équivalences sont démontrables par une double implication. C'est le cas des théorèmes directs et de leurs réciproques.

La combinaison des deux permet d'obtenir la troisième équivalence.

f- Loi de Morgan

Propriétés :

Pour toutes propositions P, Q,

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$,

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$,

$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$.

Ces trois propriétés sont démontrables en utilisant les tables de vérités des connecteurs de négation, disjonction et conjonction.

Application : Exercice 4

II Calcul des prédicats

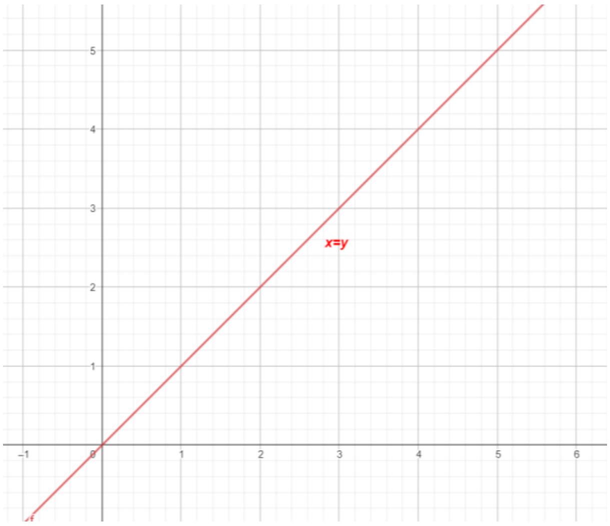
1- Variable, constante

Exemples :

- Dans la proposition $5 < 4$, les deux nombres situés de part et d'autre du symbole $<$ sont des **constantes.**
  En mathématiques on rencontre des expressions du type $x < 4$. Ici, x peut varier, dans $\mathbb{R}$ par exemple.

Pour $x = 5$, $x < 4$ s'écrit $5 < 4$. Cette proposition a bien évidemment une valeur de vérité qui est fausse (F).
Pour $x = 0$, $x < 4$ s'écrit $0 < 4$. Cette proposition a bien évidemment une valeur de vérité qui est vraie (V).
Plus généralement, pour toute valeur numériquement fixée de x, $x < 4$ devient une proposition dont la valeur de vérité est V si la valeur de x appartient à $]-\infty\,;4[$ et F, si celle-ci appartient à $[4\,;\,+\infty[$
On note $p(x)$ une expression telle que $x < 4$ dans laquelle figure une **variable** x. A toute valeur numérique de x choisie dans $\mathbb{R}$, le **prédicat p à une variable** associe la proposition obtenue en remplaçant dans $p(x)$, x par sa valeur numérique.

- Avec $x < y$, où x et y sont tous deux variables dans $\mathbb{R}$, on peut définir de la même façon, un **prédicat q à deux variables.** Dans ce cas, $q(x,y)$ est $x < y$.
  Pour $x = 5$ et $y = 4$, $q(5,4)$ est faux.
  Pour $x = 0$ et $y = 4$, $q(0,4)$ est vrai.
  Pour $x = -1$ et $y = 2$, $q(-1,2)$ est vrai.
  Plus généralement, $q(x,y)$ est une proposition vraie lorsque le couple (x,y) appartient au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation graphique est au-dessus de la droite ci-contre :



On peut définir de la même manière un prédicat à trois variables.

Remarque : Un prédicat est parfois appelé **fonction propositionnelle**.

2- Quantificateurs

Dans le cas où $p(x)$ est $x < 4$, où x est variable dans $\mathbb{R}$ on peut définir deux nouvelles propositions :

- **Proposition 1** : « Il existe x tel que $x < 4$ (soit vrai) »
  En mathématiques, cela s'écrit $\exists x, x < 4$.
  Le symbole $\exists$ s'appelle **quantificateur existentiel**.
  En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 4$. Dans cet exemple, la proposition est vraie.

- **Proposition 2** : « Pour tout x, on a $x < 4$ »
  En mathématiques, cela s'écrit $\forall x, x < 4$.
  Le symbole $\forall$ s'appelle **quantificateur universel**.
  En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs : $\forall x \in \mathbb{R}, x < 4$. Dans cet exemple, la proposition est fausse.

- Plus généralement, p étant un **prédicat à une variable**, on peut définir les deux propositions suivantes :

$$\exists x, p(x)$$

$$\forall x, p(x)$$

La proposition « 3 est un nombre impair » peut ainsi s'écrire : $\exists k \in \mathbb{N}, 3 = 2k + 1$

Elle est vraie car $k = 1$ convient.

- Avec un **prédicat à deux variables**, on peut, de même définir de nouvelles propositions.
Par exemple, lorsque $p(x, y)$ est $x < y$ où x et y sont des variables réelles, on peut définir les propositions suivantes :
    - $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ $\longrightarrow$ est une proposition vraie
    - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$ $\longrightarrow$ est une proposition fausse
    - $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$ $\longrightarrow$ est une proposition fausse
    - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ $\longrightarrow$ est une proposition vraie

Remarque : Dans une proposition comportant deux quantificateurs différents, il ne faut pas modifier l'ordre des quantificateurs sous peine de changer la véracité de la proposition.

3- Négation d'une proposition commençant par un quantificateur

Propriétés :

La **négation** de $\exists x, p(x)$ est $\forall x, \neg p(x)$

La **négation** de $\forall x, p(x)$ est $\exists x, \neg p(x)$

La négation d'une proposition commençant par un quantificateur existentiel est une proposition commençant par un quantificateur universel, et vice versa.