Fonctions et Variations

I Définitions

1- Notation

Définition :

Une fonction f définie sur un ensemble D, associe à tout nombre réel x, un unique nombre réel noté $f(x)$. On note $x \to f(x)$.

D est l'ensemble de définition de la fonction f.

x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

$f(x)$ est appelé image de x par la fonction f.

Exemple : Soit la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions $L = x \text{ et } l = 3$.

Sachant que $A_{rectangle} = L \times l$, on a $f(x) = 3x$.

2- Antécédent et image

En considérant la fonction précédente $f(x) = 3x$, si $x = 1$ alors $f(1) = 3 \times 1 = 3$

On dit que 3 est l'image de 1 par la fonction f OU que 1 est un antécédent de 3 par la fonction f.

$$f(1) = 3$$

Antécédent Image

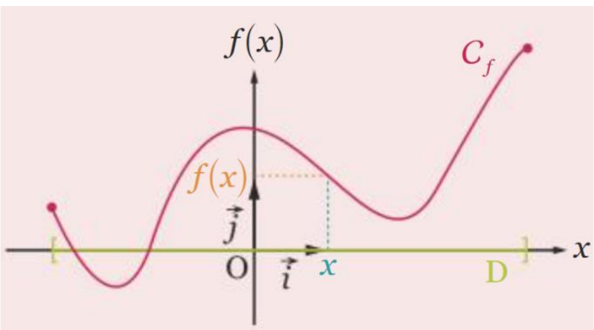
Remarque : Un antécédent ne peut avoir qu'une seule image alors qu'une image peut admettre plusieurs antécédents.

Application : Exercice 1

3- Représentation graphique

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère une fonction f définie sur D.

La courbe représentative de la fonction f, notée C_f, est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,; f(x))$, pour x parcourant l'ensemble D.



Application : Exercice 2

II Variations d'une fonction

1- Taux de variation

Définition :

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 1$

On cherche à définir le taux de variation de f entre 1 et 3. On commence donc par calculer $f(3) et\ f(1)$:

$$f(3) = 2 \times (3)^2 + 1 = 19$$

$$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 3$$

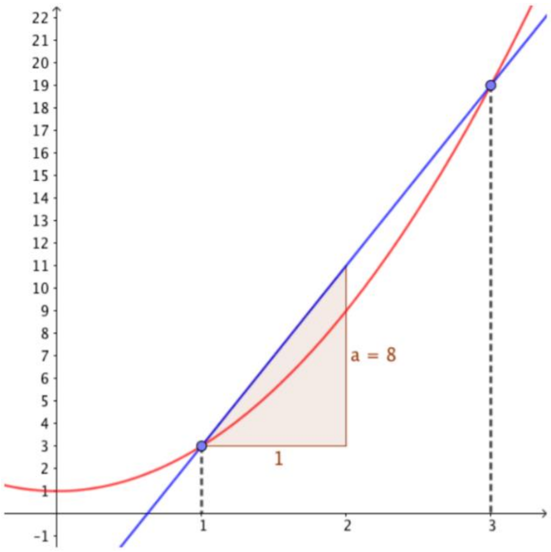
On peut ensuite calculer le taux de variation entre 1 et 3 :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{19 - 3}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8$$

Propriété :

Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la droite passant par les abscisses a et b de la courbe représentative de f.

Dans notre exemple, le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à 8, donc la pente de la droite passant par les points d'abscisses 1 et 3 est égale à 8.



Application : Exercice 3

2- Variations

Définition :

On dit qu'une fonction f est monotone sur un intervalle I, si f est :

- soit croissante sur I

- soit décroissante sur I

- soit constante sur I

Propriétés :

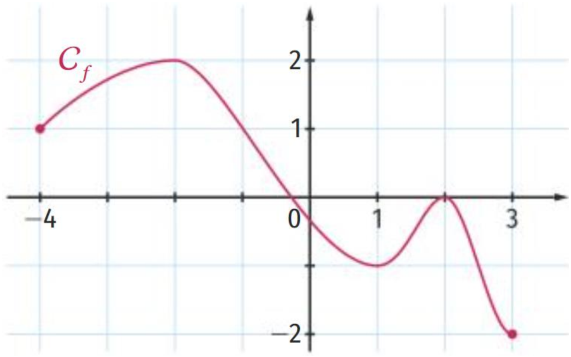
- On dit que f est croissante sur un intervalle I, lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. Elle est strictement croissante quand on a $f(a) < f(b)$.

- On dit que f est décroissante sur un intervalle I, lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$. Elle est strictement décroissante quand on a $f(a) > f(b)$.

- On dit que f est constante sur un intervalle I, lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) = f(b)$.

3- Tableau de variations

Soit f une fonction dont la courbe représentative est celle ci-contre. On veut dresser le tableau de variations de cette fonction.



Méthode :

1- On repère visuellement les coordonnées des points aux bornes de l'ensemble de définition (en vert).

2- On repère visuellement les « points de rupture » c'est-à-dire les coordonnées des points pour lesquels la courbe change de variation (en rouge).

3- On place entre chaque point les flèches correspondantes à la variation observée sur le graphique.

x	-4		-2		1		2		3
f	1	↗	2	↘	-1	↗	0	↘	-2

Remarques :

Si f est une fonction définie sur un ensemble D :

- Dire que la fonction f admet un maximum en a sur D signifie que pour tout x de D, $f(x) \leq f(a)$
- Dire que la fonction f admet un minimum en b sur D signifie que pour tout x de D, $f(x) \geq f(b)$

Application : Exercice 4