Variables aléatoires

I Variables aléatoires

Définition :

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers E.

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ».

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X qui peut prendre les valeurs $2, 3$ ou -4 :

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a $X = 2$.
- Pour l'issue 1, on a $X = 3$.
- Pour les issues 3 et 5, on a $X = -4$.

Application : Exercice 1

II Loi de probabilité

Définition :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. Chaque issue du lancer de dé est équiprobable (même probabilité) et est égale à $\frac{1}{6}$.

On note donc :

- $P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
- $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : $P(X = x_i)$ peut se noter p_i

Application : Exercice 2

III Espérance

Définition :

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Exemple : En reprenant la loi de probabilité de l'exemple précédent,

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-4) + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3$$

$$E(X) = -\frac{4}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6}$$

$$E(X) = \frac{1}{6}$$

Remarque : **L'espérance** est la **moyenne** que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

IV Variance et écart-type

Définition :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$.

On appelle variance de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le réel noté $\sigma(X)$ ou σ_x défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : Toujours en partant de l'exemple précédent :

- La variance de la variable aléatoire X est égale à :

$$V(x) = \frac{1}{3}\left(-4 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(3 - \frac{1}{6}\right)^2 \approx 8{,}81$$

- L'écart-type de la variable aléatoire est égale à :

$$\sigma(X) = \sqrt{8{,}81} \approx 2{,}97$$

Remarque : La variance permet de tenir compte de la dispersion de toutes les valeurs de la variable aléatoire, alors que l'écart-type permet de mesurer la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de son espérance.