Probabilités

I Vocabulaire

1- Expérience aléatoire

Définition :

Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats sont connus sans que l'on puisse les prévoir à l'avance.

Une issue est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles. Il est généralement noté Ω.

Exemple : L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non truqué à six faces possède six issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On note $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

2- Evènements

Définition :

Un évènement est un ensemble d'issues (résultats possibles) d'une expérience aléatoire.

Exemple : « Obtenir un chiffre pair » est un évènement regroupant 2, 4, 6 (les trois issues possibles).

Certains évènements sont particuliers. Dans chaque exemple, on prendra l'expérience aléatoire d'un lancer d'un dé non truqué à six faces :

- Un évènement est dit élémentaire lorsqu'il n'est composé que d'une seule issue.
  Exemple : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 1 »
- Un évènement est dit impossible lorsqu'il ne peut pas se réaliser.
  Exemple : « obtenir un 7 »
- Un évènement est dit certain lorsqu'il est obligé de se réaliser.
  Exemple : « obtenir un chiffre inférieur à 10 »
- Deux évènements sont dits incompatibles quand ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.
  Exemple : « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair »
- L'évènement contraire (ou complémentaire) d'un évènement A est noté $\bar{A}$ (se lit A barre). C'est l'évènement qui rassemble toutes les issues qui ne composent pas l'évènement A.
  Exemple : évènement A : « obtenir un 1 » ; évènement $\bar{A}$: « ne pas obtenir un 1 »

Application : Exercice 1

3- Loi de probabilité

Définition :

Définir une loi de probabilité d'une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3 \ldots x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues, un nombre positif ou nul, appelé probabilité, tel que $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$.

Propriété :

La probabilité d'un évènement A est $P(A) = \frac{nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{nombre\ total\ d'issues}$

Exemple : Dans une urne, on dispose de 7 jetons noirs, 5 jetons jaunes, 4 jetons verts, 3 jetons blancs et 1 jeton rouge.

Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience.

Méthode :

- On détermine l'univers associé à l'expérience aléatoire
  L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{noir\ ; jaune\ ; vert\ ; blanc\ ; rouge\}$
- On énonce la loi de probabilité dans un tableau :

Issue	Noirs	Jaunes	Verts	Blancs	Rouge
Probabilité	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Remarque : Lorsque chaque issue d'une expérience aléatoire à la même probabilité de se produire, on dit que la situation est équiprobable, ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Application : Exercice 2

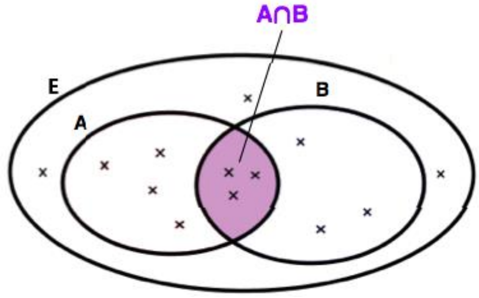
II Intersections et réunions

1- Intersection

Définition :

L'intersection d'un évènement A et d'un évènement B est la totalité des issues qui réalisent à la fois A ET B (les deux à la fois).

Elle est notée $A \cap B$ et se lit A inter B.



Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, si l'évènement A est « la carte tirée est un pique » et l'évènement B est « la carte tirée est un As » alors $A \cap B$ est « la carte tirée est l'As de pique »

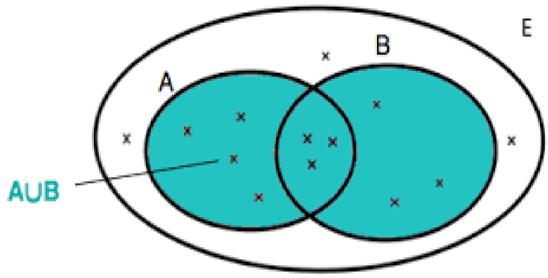
Remarque : Si les deux évènements sont incompatibles, alors l'intersection de A et de B n'existe pas. Par conséquent $P(A \cap B) = 0$.

2- Réunion

Définition :

La réunion d'un évènement A et d'un évènement B est la totalité des issues qui réalisent à la fois A OU B (au moins l'un des deux).

Elle est notée $A \cup B$ et se lit A union B.



Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, si l'évènement A est « la carte tirée est un pique » et l'évènement B est « la carte tirée est un As » alors $\underline{A \cup B}$ est « la carte tirée est un pique ou un As ». On peut donc tirer n'importe quel pique ou n'importe quel As.

Propriété :

Pour calculer la probabilité de la réunion d'un évènement A et d'un évènement B, on applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque : Si les deux évènements sont incompatibles, alors l'intersection de A et de B n'existe pas. Par conséquent $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Application : Exercice 3

3- Evènement contraire

Propriété :

Pour tout évènement A, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple : A un carrefour, on a constaté que la probabilité qu'un feu soit vert est de 0,512. Ainsi la probabilité que le feu ne soit pas vert est $1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

III Probabilités marginales et conditionnelles

Définition :

La **probabilité marginale** d'un évènement A se calcule en divisant l'effectif des issues réalisant l'évènement par l'effectif total.

La probabilité d'un évènement B sachant qu'un évènement A est réalisé est appelée **probabilité conditionnelle de B sachant A** et se note : $P_A(B)$

Exemple : On considère le tableau croisé suivant :

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	45
Ouvriers	189	126	315
Total	216	144	360

Si on s'intéresse à la probabilité hommes ouvriers, on prendra l'effectif à l'intersection des deux évènements, soit 189 sur l'effectif de la population totale, soit 360. On a donc :

$$P(hommes\ ouvriers) = \frac{189}{360}$$

La probabilité conditionnelle se lit sur une colonne ou une ligne intérieure du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	45
Ouvriers	189	126	315
Total	216	144	360

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	45
Ouvriers	189	126	315
Total	216	144	360

Dans le tableau de gauche, on cherche à connaître la probabilité des cadres sachant que ce sont des hommes. On va donc utiliser l'effectif des hommes cadres sur l'effectif des hommes :

$$P_H(C) = \frac{27}{216}$$

Dans le tableau de droite, on cherche à connaître la probabilité des hommes sachant que ce sont des cadres. On va donc utiliser l'effectif des hommes cadres sur l'effectif des cadres :

$$P_C(H) = \frac{27}{45}$$

Propriété :

La probabilité conditionnelle de B sachant A correspond au quotient de la probabilité de $A \cap B$ par la probabilité de A :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

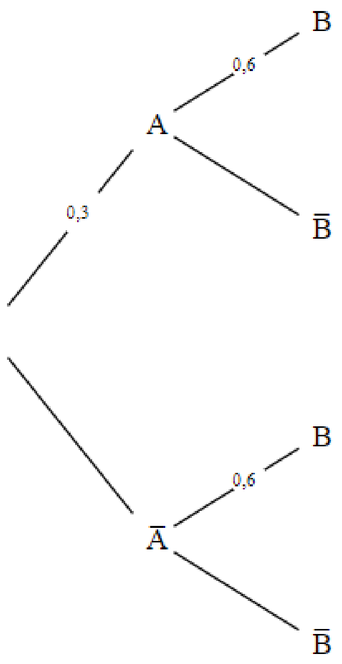
Application : Exercice 4

IV Arbre de probabilités

Définition :

On appelle **arbre de probabilités** la représentation graphique d'une expérience aléatoire

Exemple : On procède à deux tirages consécutifs :



- La première expérience aléatoire consiste à lancer une pièce truquée sachant que la probabilité de tomber sur « pile » est de 0,3.
- La deuxième expérience aléatoire revient à tirer un jeton dans un sac contenant 6 jetons rouges et 4 jetons verts.

On considère les évènements suivants :

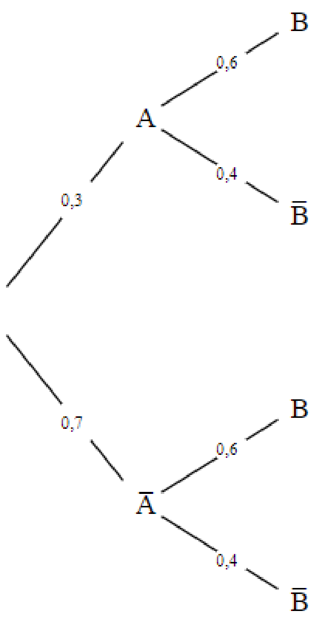
- A : « on obtient pile »
- B : « on obtient un jeton rouge »

Etape 1 :

On peut représenter cette situation par un arbre pondéré en indiquant la probabilité correspondante à chaque évènement sur les branches correspondantes.

Etape 2 :
En utilisant la formule $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, on peut ensuite compléter les probabilités manquantes.

Etape 3 :
On peut enfin calculer les probabilités d'intersection en multipliant les probabilités rencontrées sur les branches de chaque chemin.



$\rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$

$\rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

$\rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$

$\rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$

Propriétés :

La somme des probabilités d'intersection comprenant un même évènement est égale à la probabilité de cet évènement : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

La somme de toutes les probabilités d'intersection est égale à 1.

Application : Exercice 5

V Indépendance

Définition :

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'évènement « la carte tirée est un as » et T l'évènement « la carte tirée est un trèfle ».

On a la probabilité de tirer un as : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Et la probabilité de tirer un as parmi les trèfles : $P_T(A) = \frac{1}{8}$

Par conséquent : $P(A) = P_T(A) = \frac{1}{8}$

Donc les évènements A et T sont indépendants.

Application : Exercice 6