Les suites numériques

I Les suites arithmétiques

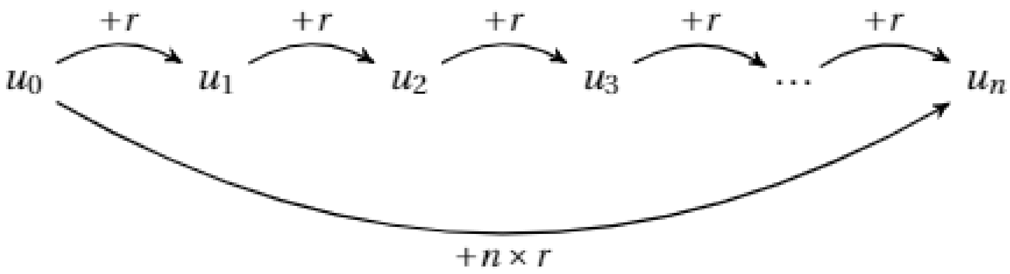
1 - Définition et propriétés

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$ (formule par récurrence)

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



Dans une suite arithmétique, on passe donc d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r.

Exemple : La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 0$

Propriété :

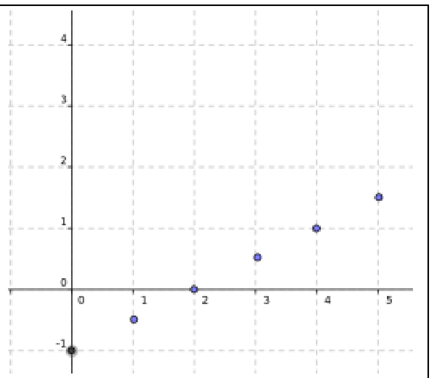
Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0,

alors $U_n = U_0 + nr$ (formule explicite)

Représentation graphique :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points alignés de coordonnées $(n\,;U_n)$.



Remarque : la représentation graphique d'une suite arithmétique est la même que celle d'une fonction affine.

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant arithmétique de raison r, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.

Ainsi on en déduit que $U_{n+1} - U_n = r$

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $r = 0$ alors $U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante

3- Somme des termes

Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (nombre\ de\ termes) \times \frac{(Premier\ terme) + (Dernier\ terme)}{2}$$

Exemples :

- En prenant la suite arithmétique que forme les nombres pairs, la somme des 10 premiers termes est :

$$S = \sum_{n=0}^{9} U_n = 10 \times \frac{U_0 + U_9}{2} = 10 \times \frac{0 + 18}{2} = 90$$

- En prenant, la suite arithmétique que forme les nombres pairs, la somme des termes allant de U_5 à U_8 est :

$$S = \sum_{n=5}^{8} U_n = 4 \times \frac{8 + 14}{2} = 44$$

4- Moyenne arithmétique de deux nombres

Définition :

La **moyenne arithmétique** de plusieurs nombres est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs. Elle est généralement notée m.

Exemple : La moyenne des 4 notes 10, 18, 5, 17 est : $m = \frac{10+18+5+17}{4} = 12{,}5$

Démonstration : Calculer la moyenne arithmétique du terme qui précède U_n et de celui qui le suit

On sait que : $U_{n+1} = U_n + r$

De la même manière : $U_n = U_{n-1} + r \Leftrightarrow U_{n-1} = U_n - r$

Donc la moyenne arithmétique du terme qui précède U_n et de celui qui le suit est :

$$m = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$$

$$m = \frac{U_n - r + U_n + r}{2}$$

$$m = U_n$$

> Propriété :
>
> U_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit.

Exemple : En prenant la suite arithmétique que forme les nombres pairs, la moyenne entre 6 et 10 est le terme situé entre ces deux nombres, soit 8.

Application : Exercice 1

II Les suites géométriques

1 - Définition et représentation

> Définition :
>
> Une suite (U_n) est **une suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = q \times U_n$.
>
> Le réel q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Schématiquement, on peut représenter une suite géométrique de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n
\end{tikzcd}$$

Dans une suite géométrique, on passe donc d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre q.

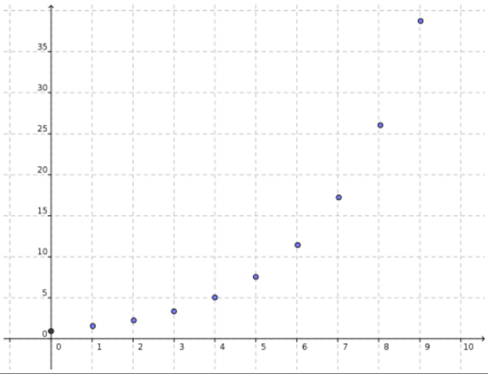
Exemple : La suite définie par $U_{n+1} = 2 \times U_n$ avec $U_0 = 1$ est une suite géométrique de raison $q = 2$. Les premiers termes de cette suite sont 1, 2, 4, 8…

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points de coordonnées $(n\,;U_n)$.

Pour une suite géométrique, on parle de **croissance (ou décroissance) exponentielle**.



2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant géométrique de raison q, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = q \times U_n$.

Ainsi on en déduit que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

- Si $q > 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow U_n < U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $q = 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante.

3- Somme des termes

Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (Premier\ terme) \times \frac{1-(raison)^{nombre\ de\ termes}}{1-raison}$$

Exemples : On considère la suite géométrique (U_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $U_0 = 2$

La somme des termes allant de U_0 à U_4 est :

$$S = \sum_{n=0}^{4} U_n = U_0 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 62$$

4- Moyenne géométrique de deux nombres

Définition :

La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b positifs est un nombre c tel que :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = \sqrt{ab}$$

Propriété :

De manière générale, pour une suite géométrique chaque terme U_n est la moyenne du terme qui le précède U_{n-1} et du terme qui le suit U_{n+1} tel que :

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{U_n}{U_{n+1}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{U_{n-1} \times U_{n+1}}$$

Exemple : On considère la suite géométrique $(U_{n)}$ de premier terme $U_0 = 2$. On sait également que $U_2 = 50$.

Pour calculer U_1, on fait : $U_1 = \sqrt{U_0 \times U_2} = \sqrt{2 \times 50} = \sqrt{100} = 10$

Application : Exercice 2