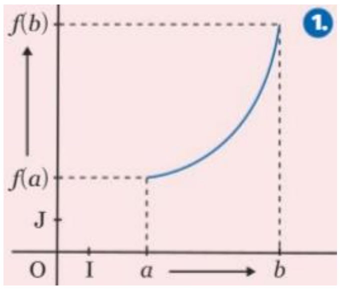
Variations de fonctions

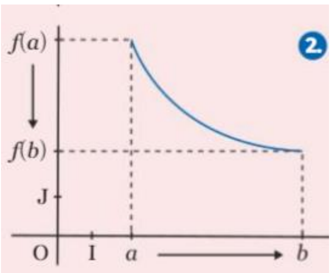
I Monotonie

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

– f est dite **croissante** sur I lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$





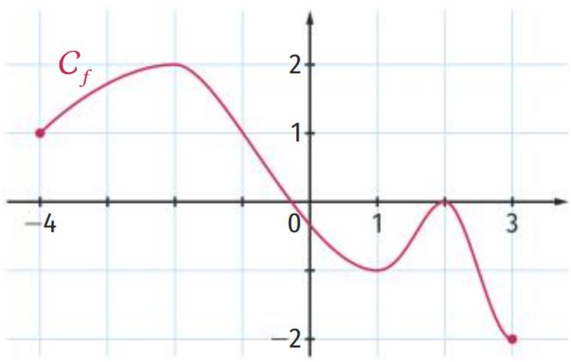
- f est dite **décroissante** sur I lorsque pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a : $f(a) \geq f(b)$

Remarques :

- f est dite monotone sur I quand elle est soit croissante, soit décroissante sur I.
- f est dite strictement croissante lorsque les inégalités des définitions sont strictes (croissante : $f(a) < f(b)$; décroissante : $f(a) > f(b)$)

II Tableau de variations

Soit f une fonction dont la courbe représentative est celle ci-contre. On veut dresser le tableau de variations de cette fonction.



Méthode :

1- On repère visuellement les coordonnées des points aux bornes de l'ensemble de définition (en vert).

2- On repère visuellement les « points de rupture » c'est-à-dire les coordonnées des points pour lesquels la courbe change de variation (en rouge).

3- On place entre chaque point les flèches correspondantes à la variation observée sur le graphique.

x	-4		-2		1		2		3
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2

Remarque : En connaissant la monotonie d'une fonction sur un intervalle, on peut comparer les images entre elles.

Exemple : Comparer $f(-3)$ et $f(-2)$

On a $-3 < -2$

Or la fonction f est croissante sur l'intervalle $[-4\,;\,-2]$

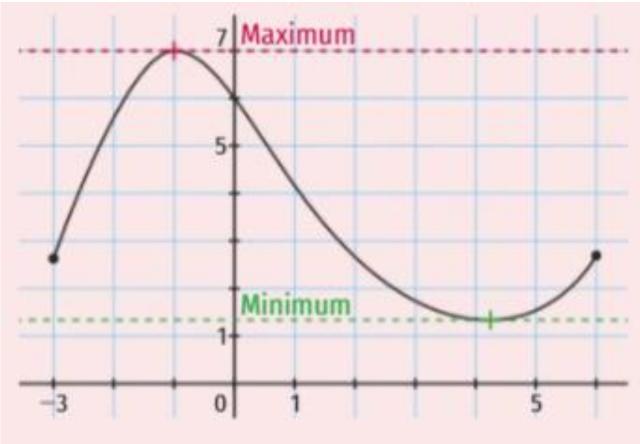
Donc $f(-3) < f(-2)$

Application : Exercice 1 question 1

III Minimum et maximum

Définition :

- On dit que f admet un minimum sur l'intervalle I quand pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$, m étant la plus petite image de x par f.
- On dit que f admet un maximum sur l'intervalle I quand pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$, M étant la plus grande image de x par f.



Le minimum et le maximum sont appelés extremums.

Application : Exercice 1 question 2

IV Lien avec les fonctions affines

Rappels :

- Une fonction affine est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$ avec m et p deux nombres réels quelconques.
- Le coefficient directeur se calcule grâce à la formule $m = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$ avec a et b deux réels distincts.

Propriété :

Le signe du coefficient directeur de la droite représentative d'une fonction affine indique la variation de cette dernière sur l'intervalle I.

Si a est positif, alors f est croissante sur l'intervalle I

Si a est négatif, alors f est décroissante sur l'intervalle I.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + 4$ sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

On a : $m = 2$. Le coefficient directeur est positif.

Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.