Probabilités

I Généralités et rappels

Définition :

Une expérience est aléatoire lorsqu'on ne peut pas prévoir à l'avance son résultat. Les différents résultats sont appelés issues de l'expérience.

Exemple : L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non truqué à six faces possède six issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Notations :

Si A est un évènement, alors la probabilité qu'il soit réalisé est notée $p(A)$. Ce nombre est un réel compris entre 0 et 1.

Lorsque A est impossible, alors $p(A) = 0$.

Lorsque A est certain, alors $p(A) = 1$.

Exemple : On lance une fois un dé non truqué à six faces. Si on note A l'évènement « Obtenir un nombre plus grand que 2 », alors A est réalisé par les issues 3, 4, 5 et 6. Chacune de ces issues ayant une probabilité de $\frac{1}{6}$, $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Définition :

Si A est un évènement, alors on note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

On a alors $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

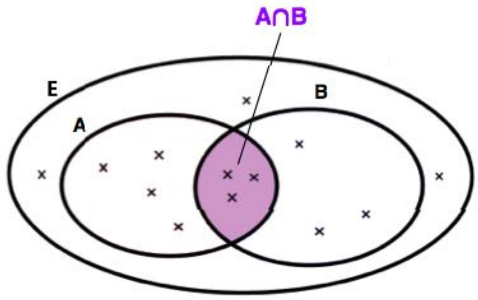
Application : Exercices 1 et 2

II Intersection et réunion

L'intersection de A et de B est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A ET à la sous-population B.

Elle est notée $A \cap B$ et se lit A inter B.

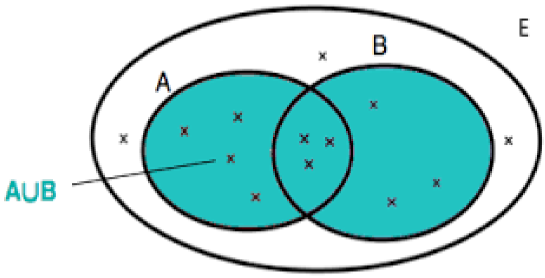
La proportion de cette intersection est égale à : $P_{A \cap B} = \frac{n_{A \cap B}}{n_E}$



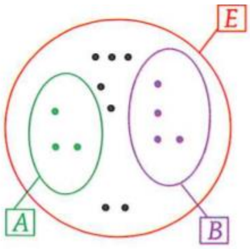
La réunion de A et de B est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A OU à la sous-population B. Elle est notée $A \cup B$ et se lit A union B.

La proportion de cette réunion est égale à :

$P_{A\cup B} = P_A + P_B - P_{A\cap B}$



Cas particulier : Sous-populations disjointes



Deux sous-populations A et B d'une même population E, sont dites disjointes lorsqu'elles n'ont aucun individu en commun, c'est-à-dire quand $A \cap B = \emptyset$ et par conséquent quand $P_{A\cap B} = 0$

Application : Exercice 3

III Probabilités marginales et conditionnelles

1- Cardinal

Définition :

Soient A et B deux variables étudiées sur une même population.

On peut croiser ces deux variables à l'aide d'un tableau croisé.

Dans chaque case, on retrouve le cardinal du caractère concerné, c'est-à-dire le nombre d'éléments de ce caractère.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$\text{card}(A\cap B)$	$\text{card}(A\cap \bar{B})$	$\text{card}(A)$
$\bar{A}$	$\text{card}(\bar{A}\cap B)$	$\text{card}(\bar{A}\cap \bar{B})$	$\text{card}(\bar{A})$
Total	$\text{card}(B)$	$\text{card}(\bar{B})$	$\text{card}(E)$

2- Probabilités marginales et conditionnelles

La probabilité marginale se lit en marge du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	**45**
Ouvriers, techniciens	189	126	315
Total	216	144	**360**

Dans cet exemple, on compte 360 salariés au total dont 45 cadres.

La probabilité marginale de cadres est donc de $\frac{45}{360} = 0.125 = 12.5\%$. Elle correspond à la probabilité d'être un cadre dans cette société parmi les 360 salariés.

La probabilité conditionnelle se lit sur une colonne ou une ligne intérieure du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	**45**
Ouvriers, techniciens	**189**	126	315
Total	**216**	144	**360**

Dans cet exemple, on ne prend en compte que les hommes parmi tous les salariés qui sont au nombre de 216.

La probabilité conditionnelle d'être un ouvrier ou un technicien sachant que c'est un homme est donc de : $\frac{189}{216} = 0.875 = 87.5\%$

Elle est notée $P_{homme}(ouvriers) = \frac{189}{216} = 0.875$

<u>Application</u> : Exercices 4 et 5

IV Arbre pondéré

Il est parfois utile de représenter une situation de probabilités par un arbre et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.

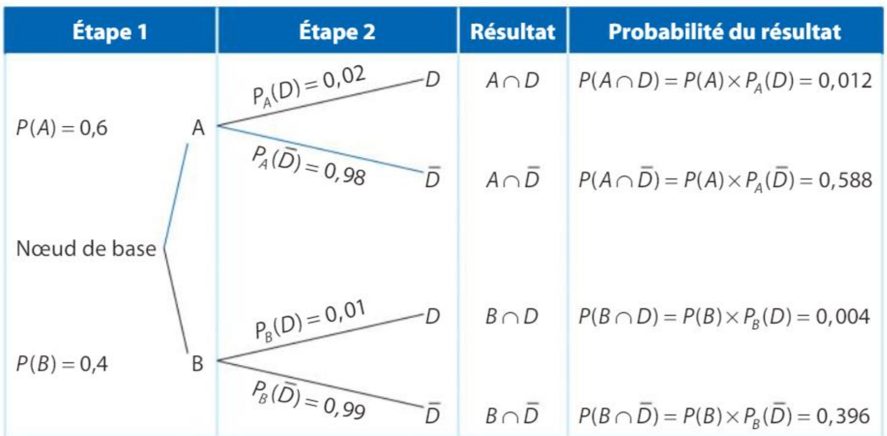
<u>Exemple</u> : Dans une entreprise, pour une production de 10 000 paires de chaussures, on a obtenu le tableau suivant :

	Chaussures sans défaut	Chaussures défectueuses	Total
Chaussures produites dans l'atelier 1	5 880	120	6 000
Chaussures produites dans l'atelier 2	3 960	40	4 000
Total	9 840	160	10 000

On considère les évènements suivants :

- A : « la paire de chaussures prélevée provient de l'atelier 1 »
- B : « la paire de chaussures prélevée provient de l'atelier 2 »
- D : « la paire de chaussures prélevée est défectueuse »

Un arbre pondéré représentant la situation serait le suivant :



Propriété 1 :

La probabilité d'un « résultat » est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui conduisent à ce résultat.

Propriété 2 :

La probabilité d'un évènement apparaissant à l'issue de l'étape 2 est égale à la somme des probabilités des résultats dans lesquels cet évènement figure.

V Indépendance de deux évènements

Définition :

Deux évènements de probabilités non nulles A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$P_B(A) = P(A)$ ce qui est équivalent à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple : Considérons le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.

Soit A l'évènement « tirer un as », et B l'évènement « tirer un cœur ».

On a :

- $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
- $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$A \cap B$ est donc l'évènement « tirer l'as de cœur » et sa probabilité sera $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$

Or : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

Donc : Les évènements A et B sont indépendants.

Application : Exercice 6

VI Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une est appelée « **succès** » notée S et l'autre appelée **« échec »** notée $\bar{S}$.

Pour simplifier l'écriture, dans une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès, donc $p(S) = p$ et $p(\bar{S}) = 1 - p$

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». L'évènement $\bar{S}$ est alors « Ne pas obtenir un 6 ». C'est une épreuve de Bernoulli où $p = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Application : Exercice 7

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : Si on effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne, alors les deux tirages sont indépendants.

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». Puisque les lancés sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 3$ et $p = p(S) = \frac{1}{6}$

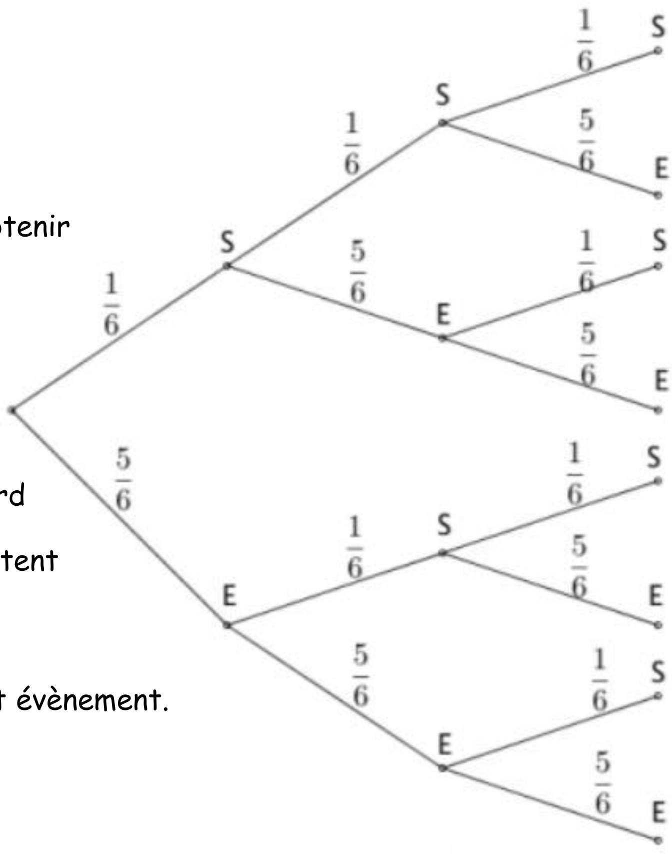
Méthode :

On peut modéliser un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré de probabilité en appliquant les règles suivantes :

1/ La probabilité d'un évènement représenté par un chemin de l'arbre est égale au produit des probabilités rencontrées au cours du chemin.

2/ Si un évènement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

Dans l'exemple précédent, on peut réaliser l'arbre pondéré ci-contre :



1/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir 3 succès », on obtient $p(S/S/S)\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

2/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir un succès et deux échecs », on doit d'abord calculer la probabilité d'un des chemins qui représentent cet évènement, soit $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$

On constate ensuite que 3 chemins représentent cet évènement.

Il faut donc additionner les probabilités de chacun de ces chemins, soit

$\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$

<u>Application</u> : Exercice 8