Généralités sur les fonctions

I Notions de fonction

1- Définition et vocabulaire

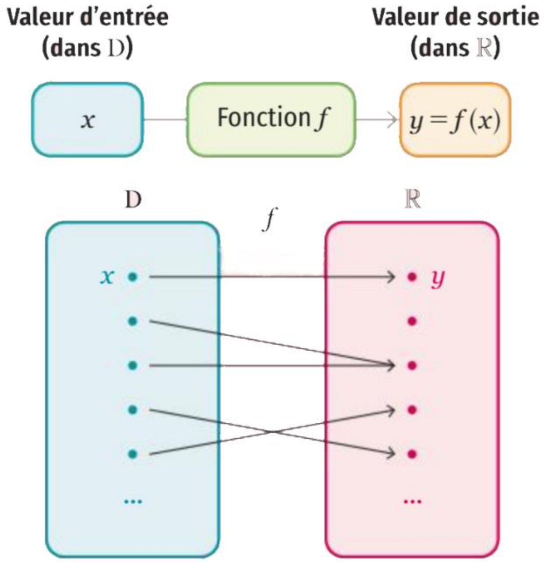
Définition :

Définir une fonction f sur un ensemble de réels D consiste à associer à chaque réel $x \in$ D, un unique réel y.

Pour signifier que y est le réel associé à x par la fonction f, on note $y = f(x)$.

La fonction f fait donc correspondre D à $\mathbb{R}$, et x à y.

On peut représenter cela par le schéma ci-contre :



Vocabulaire :

- D est appelé **ensemble de définition** de f, c'est-à-dire l'ensemble des réels x sur lesquels la fonction f associe un réel y.
- On dit que x est un **antécédent** de y par f.
- y est appelé **l'image** de x par f.

Exemple : Soit la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions $L = x$ et $l = 3$.

Sachant que $A_{rectangle} = L \times l$, et que $f(x)$ exprime l'aire d'un rectangle

on note $f(x) = 3x$.

2- Antécédent et image

En considérant la fonction f définie par $f(x) = 3x$, si $x = 1$ alors $f(1) = 3 \times 1 = 3$

On dit que 3 est l'image de 1 par la fonction f OU que 1 est un antécédent de 3 par la fonction f.

$$f(1) = 3$$

Antécédent Image

Remarque : Un antécédent ne peut avoir qu'une seule image alors qu'une image peut admettre plusieurs antécédents.

Application : Exercice 1

3- Tableau de valeurs

Grâce à la formule d'une fonction, on peut dresser un tableau de valeurs.

Exemple :

En considérant toujours la fonction f définie par $f(x) = 3x$, on peut calculer l'aire du rectangle pour différentes valeurs de x, et regrouper le tout dans un tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	3	6	9	12	15	18

Pour chaque réel x (ou antécédent) correspond un réel y (ou $f(x)$ ou image).

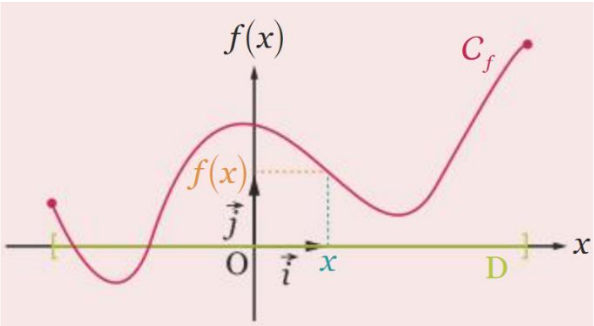
Chaque colonne de ce tableau représente les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction.

Application : Exercice 2

4- Représentation graphique

Dans un repère, on considère une fonction f définie sur D.

La courbe représentative de la fonction f, notée C_f, est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,; f(x))$, pour x parcourant l'ensemble D.



Application : Exercice 3

II Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Découverte : Exercice 4

1- Résolution d'équations…

a- …du type $f(x) = k$

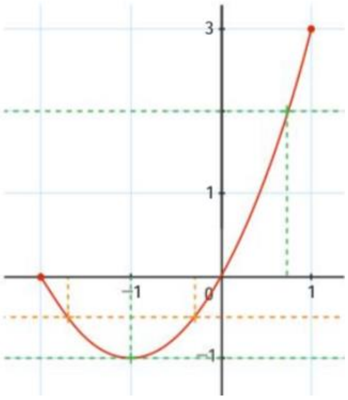
Définition :

Soient f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel.

Résoudre l'équation $f(x) = k$ consiste à déterminer tous les réels x appartenant à D qui ont pour image k. En d'autres termes, on détermine l'ensemble des antécédents de k par f.

Graphiquement, les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentative de f ayant pour ordonnée k.

Exemple :



On considère la fonction f définie par la représentation graphique ci-contre sur $[-2\,;1]$.

L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution $x = -1$

L'équation $f(x) = -0{,}5$ admet deux solutions (approximativement -1.7 et 0.3)

Application : Exercice 5 Question 1

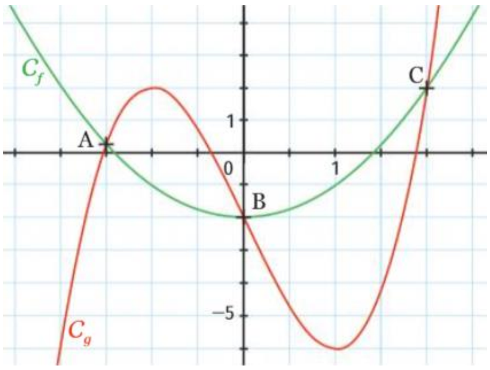
b- … du type $f(x) = g(x)$

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer tous les réels x appartenant à D qui ont la même image par f et par g

Graphiquement, les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g.



Exemple : On considère les deux représentations graphiques ci-contre pour les fonctions f et g. On constate que les deux courbes admettent 3 points d'intersection A, B et C, d'abscisses respectives $-1.5\,;0$ et 2. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est donc $S = \{-1.5\,;0\,;2\}$

Application : Exercice 5 Question 2

2- Résolution d'inéquations…

a- … du type $f(x) \geq k$

Définition :

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$ consiste à déterminer l'ensemble de tous les réels x appartenant à D dont l'image est supérieure ou égale à k.

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à k.

Exemple :

$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-0{,}7\,;1] \cup [2{,}7\,;\,+\infty[$

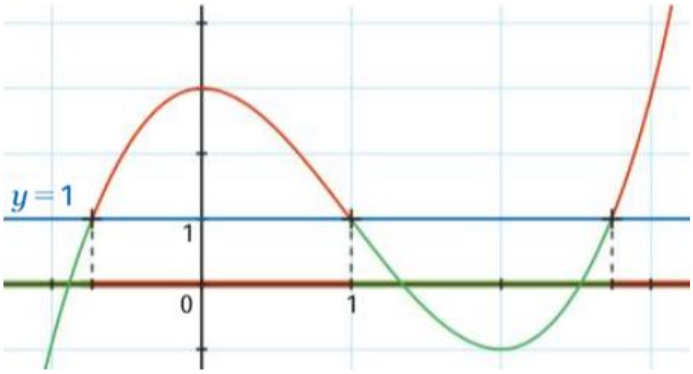
$f(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-0{,}7\,;1[\cup]2{,}7\,;\,+\infty[$

En rouge

$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-0{,}7] \cup [1\,;2{,}7]$

$f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-0{,}7[\cup]1\,;2{,}7[$

En vert



Application : Exercice 6

b- ... de type $f(x) \geq g(x)$

Définition :

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ consiste à déterminer l'ensemble de tous les réels x appartenant à D dont l'image par f est supérieure ou égale à l'image par g.

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés au-dessus des points de la courbe représentative de g.

Exemple :

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1{,}5] \cup [0\,;2]$

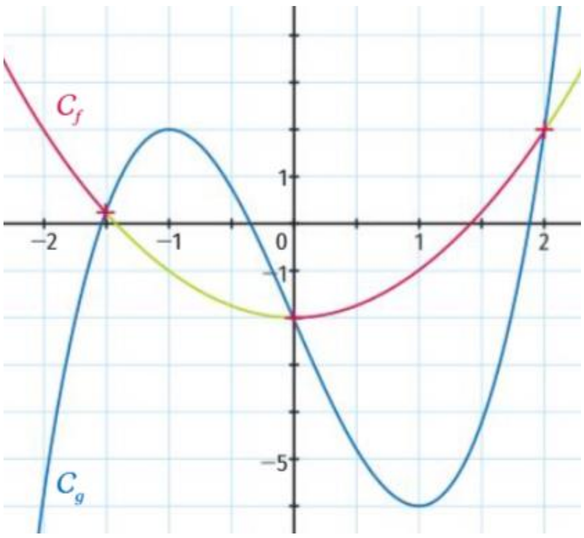
$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1{,}5[\cup]0\,;2[$

En rouge

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [-1{,}5\,;0] \cup [2\,;\,+\infty[$

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1{,}5\,;0[\cup]2\,;\,+\infty[$

En vert



Application : Exercice 7

III Résolution algébrique d'équations et d'inéquations

1- Résolution d'équations

Définition :

Une **équation** a une inconnue est une **égalité** dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnu pour que l'égalité soit vraie. Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation.

Méthode de résolution :

On applique des opérations successives aux deux membres de l'équation dans le but d'isoler l'inconnue d'un côté. On obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemple :

$$5x + 6 = 8 - 2x$$

$$5x + 6 + 2x = 8$$

$$5x + 2x = 8 - 6$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

Propriété :

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des deux facteurs est nul.

Exemple :

$$(4x + 6)(5 - 2x) = 0$$

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des deux facteurs est nul.

$4x + 6 = 0$	ou	$5 - 2x = 0$
$4x = -6$	ou	$5 = 2x$
$x = -\frac{6}{4}$	ou	$\frac{5}{2} = x$
$x = -\frac{3}{2}$	ou	$\frac{5}{2} = x$

Propriété :

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.

Si $a < 0$ alors il n'y a pas de solution.

Si $a = 0$ alors l'équation admet une solution $x = 0$.

Si $a > 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exemple :

$x^2 = 16$ admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ ou $x = -\sqrt{16} = -4$

Application : Exercice 8

2- Résolution d'inéquations

Définition :

Une **inéquation** est une **inégalité** dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnu pour que l'inégalité soit vraie. Ces valeurs sont un ensemble généralement noté sous forme d'intervalle.

Méthode de résolution :

On applique des opérations successives aux deux membres de l'inéquation dans le but d'isoler l'inconnue d'un côté. On obtient ainsi l'ensemble des valeurs de l'inconnue.

Exemples :

$5x + 6 \leq 8 - 2x$ $5x + 6 + 2x \leq 8$ $5x + 2x \leq 8 - 6$ $7x \leq 2$ $x \leq \frac{2}{7}$ $S =]-\infty\,; \frac{2}{7}]$	$-5x + 6 \leq 8 - 2x$ $-5x + 6 + 2x \leq 8$ $-5x + 2x \leq 8 - 6$ $-3x \leq 2$ $x \geq -\frac{2}{3}$ $S = [-\frac{2}{3}\,;\, +\infty[$

Les règles de calcul sont les mêmes que pour résoudre une équation **SAUF** quand on **divise par un nombre négatif**. Dans ce cas, le signe de l'inégalité change de sens.

Méthode de résolution en étudiant le signe :

On cherche à résoudre l'inéquation $(3x - 6)(2 - 2x) > 0$

Le signe de ce produit dépend du signe de chaque facteur. A l'aide d'un tableau de signes, on pourra déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$3x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$2 - 2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x - 6)(2 - 2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions est donc $S =]1\,; 2[$

Remarque : On peut procéder de la même manière pour déterminer l'ensemble de solutions d'un quotient.