Loi binomiale

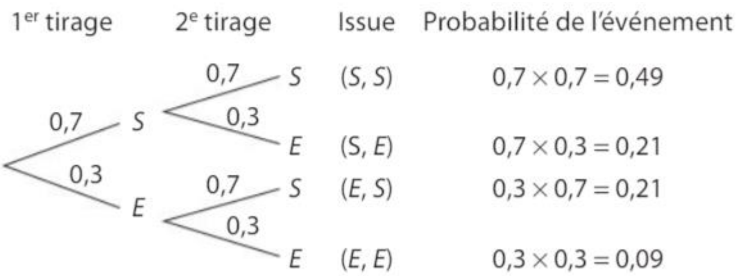
I Loi binomiale

1- Définition

> Définition :
>
> La **loi binomiale** de paramètres n et p notée $B(n,p)$ est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.

Exemple : Dans un jeu télévisé opposant deux équipes jouant en alternance, chaque participant doit, à certains moments, prélever une boule dans une urne contenant 7 boules vertes et 3 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage équiprobable. Si une boule verte est tirée, l'équipe concernée continue de jouer ce qui est considéré comme un succès.

Deux prélèvements dans l'urne sont réalisés successivement en remettant la 1ère boule dans l'urne. Il s'agit de deux épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes :



On peut associer à ce schéma de Bernoulli les trois nombres $0, 1$ et 2 mesurant le nombre de succès possibles affectés des probabilités des évènements correspondants :

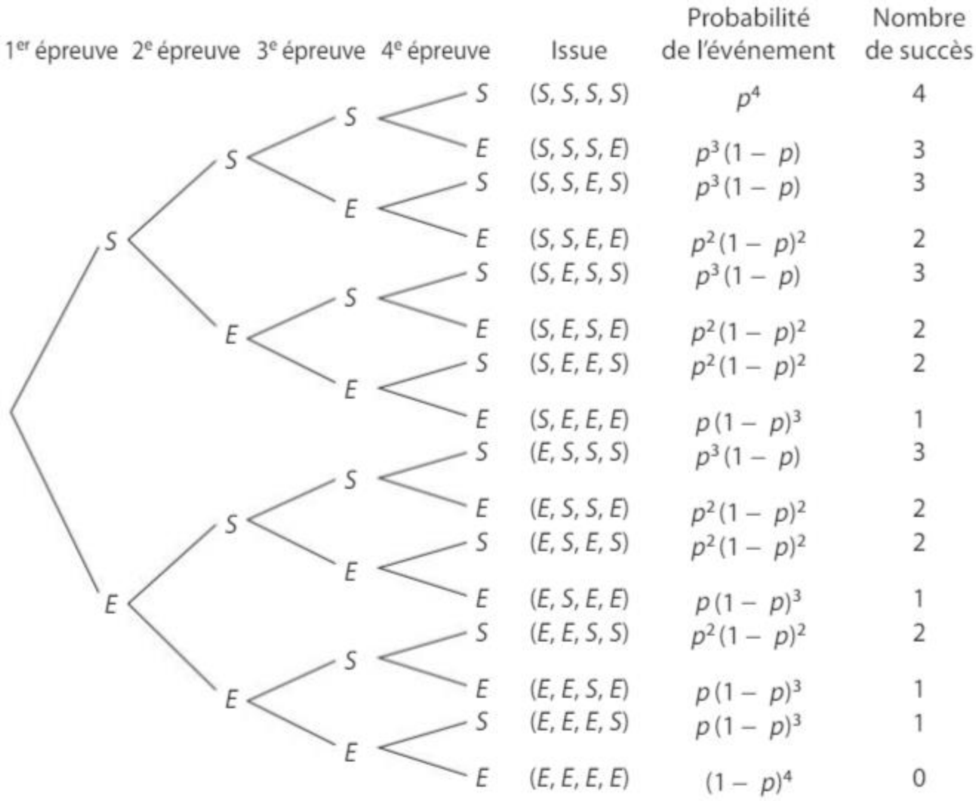
k	0	1	2
Probabilité d'obtenir k succès	0,09	0,42	0,49

La probabilité d'obtenir k succès dans ce schéma de Bernoulli où $n = 2$ est notée $P(X = k)$, où X est la variable aléatoire donnant le nombre de succès.

2- Théorème

> Définition :
>
> Pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n,\ p)$, où n est un entier naturel et p un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$, on a pour tout entier k compris entre 0 et n :
>
> $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
>
> $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n » pour le nombre de chemins qui réalisent k succès dans l'arbre de probabilités. Ils sont appelés **coefficients binomiaux**.

Exemple : Construisons l'arbre de probabilités correspondant au schéma de Bernoulli dans le cas où $n = 4$ et où la valeur du paramètre p n'est pas donnée.



4 issues donnent 3 succès et la probabilité de l'évènement correspondant à chacun est la même.

Donc $P(X = 3) = p^3(1-p) + p^3(1-p) + p^3(1-p) + p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$

On peut récapituler ces résultats dans le tableau qui donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^{2(1-p)^2}$	$4p^3(1-p)$	p^4

Remarque : On observe une symétrie des coefficients numériques $1, 4, 6, 4, 1$ figurant dans le tableau.

3- Application dans un tableur

Pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale :

- on utilise la formule $= LOI.BINOMIALE(k\,;n\,;p\,;FAUX)$ pour le calcul de $P(X = k)$
- on utilise la formule $= LOI.BINOMIALE(k\,;n\,;p\,;VRAI)$ pour le calcul de $P(X \leq k)$

Exemple : Pour réaliser les tables suivantes, il suffit d'entrer

- en B3 la formule $= LOI.BINOMIALE(A3\,;100\,;0{,}2\,;FAUX)$
- en C3 la formule $= LOI.BINOMIALE(A3\,;100\,;0{,}2\,;VRAI)$

On recopie ensuite vers le bas.

Remarque : Si $k = 2$ alors $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

III Espérance

Définition :

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n, p)$ est $E(X) = np$

Exemple : Une entreprise commercialise des accessoires pour les tablettes numériques. On note E l'évènement : « un accessoire prélevé au hasard dans le stock est défectueux » avec $P(E) = 0{,}04$. On procède avec remise au tirage de 25 accessoires.

On étudie donc la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}04$

L'espérance de cette variable aléatoire sera $E(X) = 25 \times 0{,}04 = 1$

Remarque : **L'espérance** est la **valeur moyenne** dans le cas d'un grand nombre de réalisations du schéma de Bernoulli associé à la variable aléatoire X.

IV Variance et écart-type

Définition :

La **variance** d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B\ (n, p)$ est $V(X) = np(1 - p)$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent :

- $V(X) = 25 \times 0{,}04 \times (1 - 0{,}04) = 0{,}96$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$

Résumé en vidéo