Exercices sur les variables aléatoires – Lycée d'Adultes de Paris

Exercice 1 :

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(\mathrm{X})$.

Exercice 2 : Loterie

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.

On achète un billet au hasard.

X est la variable aléatoire, définie sur Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.

1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?
4) L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre *x*, avec *x* compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer *x*.

Exercice 3 :

Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activités : la compétition C, le loisir L et l'aquagym A. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule de ces activités.

Voici la répartition des adhérents suivant l'activité choisie :

• L : 30 % • A : 20 % • C : 50 %

L'adhésion à la section L ou à la section A coûte 60 € tandis que l'adhésion à la section C revient à 100 € pour l'année. En outre, le club organise chaque année une journée de rencontre, notée R, pour laquelle une participation de *x* euros $(0 < x < 40)$ par participant est demandée. Un tiers des adhérents de L, un quart de ceux de A et la moitié de ceux de C participent à cette journée.

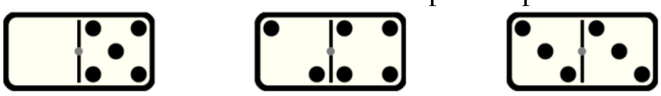
1) Compléter le tableau suivant en inscrivant les pourcentages qui conviennent.

	L	A	C	Total
R				
$\overline{\mathrm{R}}$				
Total				100

2) On interroge au hasard un membre du club. On appelle S la variable aléatoire qui à chaque adhérent associe le montant annuel à verser au club (cotisation plus participation éventuelle à la rencontre).
   a) Quelles sont les valeurs prises par S?
   b) Indiquer la loi de probabilité de S en fonction de *x*.
   c) Calculer E(S) en fonction de *x*.
   d) A quel prix le directeur du club doit-il fixer la participation à la journée de rencontre s'il veut que le coût moyen par adhérent ne dépasse pas 90 €.

Exercice 4 :

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.



1) Prouvez que le nombre de dominos est 28.
2) Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3?

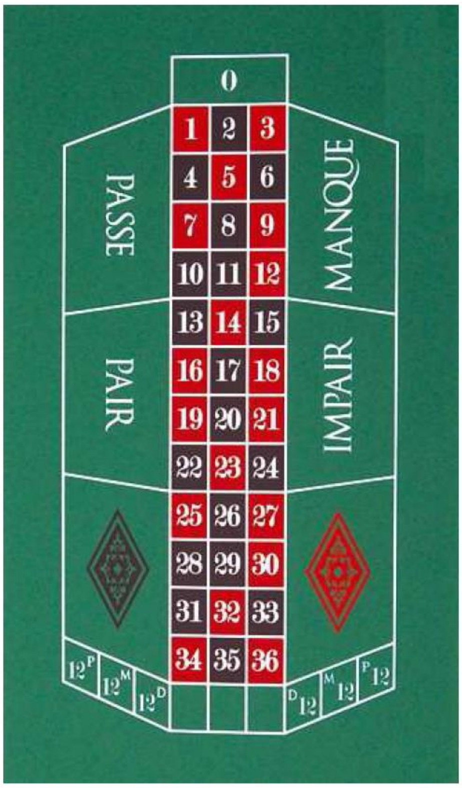
3) X est la variable aléatoire prenant la valeur -1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur n lorsqu'il obtient le double « $\{n, n\}$ ».

a) Quelle est la loi de probabilité de X?

b) Calculez E(X).

c) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 5 :



Au jeu de la roulette, les 37 issues 0, 1, 2, …, 36 sont équiprobables.

On se propose de comparer trois stratégies de jeu.

• **Stratégie 1** : un joueur mise 10 € sur "*rouge*".
Si un numéro rouge sort, il reçoit le double de sa mise ; sinon, perd sa mise.

• **Stratégie 2** : il mise 10 € sur un numéro.
S'il sort, il reçoit 36 fois sa mise ;
sinon, il perd sa mise.

• **Stratégie 3** : il mise 10 € sur l'événement P_{12} (première douzaine) qui correspond à la sortie de l'un des numéros 1, 2, . . ., 12.
Si cet événement est réalisé, il reçoit le triple de sa mise ;
sinon, il perd sa mise.

1) Pour chacune des stratégies :

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance.

2) Comparer les espérances et les variances.
Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de "*gagner une grosse somme*" ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 :

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(\mathrm{X})$.

X peut prendre les valeurs -5, 0,5 et 1,5.
Le dé étant parfait, on obtient :

$$p(\mathrm{X}=-5)=\frac{1}{6}\ ,\quad p(\mathrm{X}=0{,}5)=\frac{3}{6}\quad \text{et}\quad p(\mathrm{X}=1{,}5)=\frac{2}{6}.$$

Loi de probabilité de X :

X	-5	0,5	1,5	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{6}{6}$

Calcul de l'espérance :

$$E(\mathrm{X})=\frac{1}{6}\times(-5)+\frac{3}{6}\times 0{,}5+\frac{2}{6}\times 1{,}5=\frac{-5}{6}+\frac{1{,}5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-0{,}5}{6}=-\frac{1}{12}.$$

Exercice 2 : Loterie

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €. On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω*, égale au gain algébrique procuré par le billet.*

1) *Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.*
En déduisant le prix d'achat du billet, X peut prendre les valeurs :
-2 , 98 , 148 et 498.

2) *Déterminer la loi de probabilité de X.*

$$p(\mathrm{X}=498)=\frac{1}{2000}\quad ,\quad p(\mathrm{X}=148)=\frac{2}{2000}\quad \text{et}\quad p(\mathrm{X}=98)=\frac{5}{2000}$$

8 billets sont gagnants donc 1992 billets sont perdants :

$$p(\mathrm{X}=-2)=\frac{1992}{2000}$$

Loi de probabilité de X :

X	-2	98	148	498	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1992}{2000}$	$\frac{5}{2000}$	$\frac{2}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{2000}{2000}$

3) *Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?*
Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned}E(\mathrm{X})&=\frac{1992}{2000}\times(-2)+\frac{5}{2000}\times 98+\frac{2}{2000}\times 148+\frac{1}{2000}\times 498\\&=-\frac{3984}{2000}+\frac{490}{2000}+\frac{296}{2000}+\frac{498}{2000}\\&=-\frac{3984}{2000}+\frac{1284}{2000}\\&=-\frac{2700}{2000}=-1{,}35\end{aligned}$$

En moyenne, un joueur 1,35 € par partie.

4) *L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x, avec x compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x.*

Pour x billets vendus, 8 billets sont gagnants et $x-8$ billets sont perdants.

La loi de probabilité de X devient :

X	-2	98	148	498	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{x-8}{x}$	$\frac{5}{x}$	$\frac{2}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x}$

Le jeu est équitable si l'espérance est nulle :

$$E(\mathrm{X})=0 \iff \frac{x-8}{x}\times(-2)+\frac{5}{x}\times 98+\frac{2}{x}\times 148+\frac{1}{x}\times 498=0$$

En multipliant les deux membres de l'inéquation par x, on obtient :

$$(-2)(x-8)+490+296+498=0$$
$$\iff -2x+16+1284=0$$
$$\iff -2x=-1300$$
$$\iff x=\frac{-1300}{-2}=650$$

Le jeu est équitable pour 650 billets vendus.

Exercice 3 :

Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activités : la compétition C, le loisir L et l'aquagym A. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule de ces activités.
Voici la répartition des adhérents suivant l'activité choisie :

- *L : 30 %* • *A : 20 %* • *C : 50 %*

L'adhésion à la section L ou à la section A coûte 60 € tandis que l'adhésion à la section C revient à 100 € pour l'année. En outre, le club organise chaque année une journée de rencontre, notée R, pour laquelle une participation de x euros $(0<x<40)$ par participant est demandée. Un tiers des adhérents de L, un quart de ceux de A et la moitié de ceux de C participent à cette journée.

1) *Compléter le tableau suivant en inscrivant les pourcentages qui conviennent.*

	L	A	C	Total
R	10	5	25	40
$\overline{\mathrm{R}}$	20	15	25	60
Total	30	20	50	100

2) *On interroge au hasard un membre du club. On appelle S la variable aléatoire qui à chaque adhérent associe le montant annuel à verser au club (cotisation plus participation éventuelle à la rencontre).*

a) *Quelles sont les valeurs prises par S ?*

S peut prendre les valeurs :

60 , 100 , $60+x$ et $100+x$.

b) *Indiquer la loi de probabilité de S en fonction de x.*

20 adhérents de L et 15 adhérents de A n'ont pas participé à la journée de rencontre donc :

$$p(\mathrm{S}=60)=\frac{20+15}{100}=\frac{35}{100}$$

10 adhérents de L et 5 adhérents de A ont participé à la journée de rencontre donc :

$$p(\mathrm{S}=60+x)=\frac{10+5}{100}=\frac{15}{100}$$

25 adhérents de C n'ont pas participé à la journée de rencontre donc :

$$p(\mathrm{S}=100)=\frac{25}{100}$$

25 adhérents de C ont participé à la journée de rencontre donc :

$$p(\mathrm{S}=100+x)=\frac{25}{100}$$

On obtient la loi de probabilité de S :

S	60	$60+x$	100	$100+x$	total
$p(\mathrm{S})$	$\frac{35}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{100}{100}$

c) Calculer E(S) en fonction de *x*.

$$E(\mathrm{S})=\frac{35}{100}\times 60+\frac{15}{100}\times(60+x)+\frac{25}{100}\times 100+\frac{25}{100}\times(100+x)$$
$$=21+9+\frac{15}{100}x+25+25+\frac{25}{100}x$$
$$=0,4x+80$$

d) *A quel prix le directeur du club doit-il fixer la participation à la journée de rencontre s'il veut que le coût moyen par adhérent ne dépasse pas 90 €.*

$$E(\mathrm{S})\leq 90 \iff 0,4x+80\leq 90$$
$$\iff 0,4x\leq 90-80$$
$$\iff x\leq\frac{10}{0,4}$$
$$\iff x\leq 25$$

Ce prix ne doit pas dépasser 25 €.

Exercice 4 :

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points.

Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.

1) *Prouvez que le nombre de dominos est 28.*

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

On dénombre 28 dominos.

2) *Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu.*

a) *Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?*

Tous les dominos ont la même probabilité d'apparaître en raison du tirage au hasard :

$$p(\text{double})=\frac{\text{nb doubles}}{\text{nb dominos}}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

b) *Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 ?*

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	**3**	4	5	**6**
1		2	**3**	4	5	**6**	7
2			4	5	**6**	7	8
3				**6**	7	8	**9**
4					8	**9**	10
5						10	11
6							**12**

$$p(\text{multiples de }3)=\frac{\text{nb multiples de }3}{\text{nb dominos}}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

3) *X est la variable aléatoire prenant la valeur −1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur n lorsqu'il obtient le double «{n,n}».*

a) *Quelle est la loi de probabilité de X ?*

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1
1		1	−1	−1	−1	−1	−1
2			2	−1	−1	−1	−1
3				3	−1	−1	−1
4					4	−1	−1
5						5	−1
6							6

X peut prendre les valeurs −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
La loi de probabilité de X est :

X	−1	0	1	2	3	4	5	6	total
$p(X)$	$\frac{21}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{28}{28}$

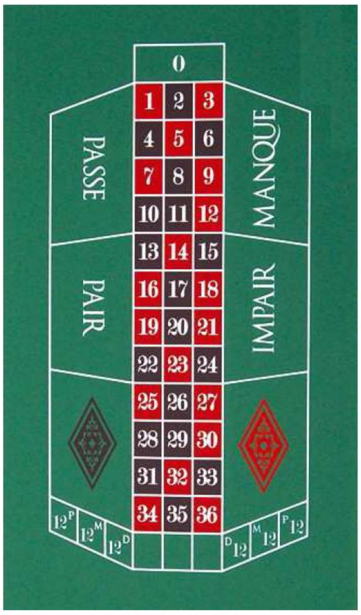
b) *Calculez E(X).*

$$E(X)=\frac{21}{28}\times(-1)+\frac{1}{28}\times 0+\frac{1}{28}\times 1+\frac{1}{28}\times 2+\frac{1}{28}\times 3+\frac{1}{28}\times 4+\frac{1}{28}\times 5+\frac{1}{28}\times 6$$
$$=-\frac{21}{28}+\frac{1}{28}+\frac{2}{28}+\frac{3}{28}+\frac{4}{28}+\frac{5}{28}+\frac{6}{28}$$
$$=0$$

c) *Calculer la variance et l'écart-type de X.*

$$V(X)=\frac{21}{28}\times(-1)^2+\frac{1}{28}\times 0^2+\frac{1}{28}\times 1^2+\frac{1}{28}\times 2^2+\frac{1}{28}\times 3^2+\frac{1}{28}\times 4^2+\frac{1}{28}\times 5^2+\frac{1}{28}\times 6^2-\left(E(X)\right)^2$$
$$=\frac{21}{28}+\frac{1}{28}+\frac{4}{28}+\frac{9}{28}+\frac{16}{28}+\frac{25}{28}+\frac{36}{28}=\frac{112}{28}=4$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$$

Exercice 5 :



Au jeu de la roulette, les 37 issues 0, 1, 2, . . ., 36 sont équiprobables.
On se propose de comparer trois stratégies de jeu.

- ***Stratégie 1*** *: un joueur mise 10 € sur "rouge".*
  Si un numéro rouge sort, il reçoit le double de sa mise ; sinon, perd sa mise.
- ***Stratégie 2*** *: il mise 10 € sur un numéro.*
  S'il sort, il reçoit 36 fois sa mise ; sinon, il perd sa mise.
- ***Stratégie 3*** *: il mise 10 € sur l'événement* P_{12} *(première douzaine) qui correspond à la sortie de l'un des numéros 1, 2, . . ., 12.*
  Si cet événement est réalisé, il reçoit le triple de sa mise ; sinon, il perd sa mise.

1) *Pour chacune des stratégies :*

a) *Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.*

Soit G la variable aléatoire qui définit le gain du joueur.

Stratégie 1 : 18 cases rouges sur 37

La v.a. G_1 peut prendre les valeurs -10 et 10.

$$\rightarrow p(G_1=-10)=\frac{19}{37} \text{ et } p(G_1=10)=\frac{18}{37}.$$

La loi de probabilité de G_1 est :

G_1	-10	10	total
$p(G_1)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$	$\frac{37}{37}$

Stratégie 2 : 1 case gagnante sur 37

La v.a. G_2 peut prendre les valeurs -10 et 350.

$$\rightarrow p(G_2=-10)=\frac{36}{37} \text{ et } p(G_2=350)=\frac{1}{37}.$$

La loi de probabilité de G_2 est :

G_2	-10	350	total
$p(G_2)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{37}{37}$

Stratégie 3 : 12 cases gagnantes sur 37

La v.a. G_3 peut prendre les valeurs -10 et 20.

$$\rightarrow p(G_3=-10)=\frac{25}{37} \text{ et } p(G_3=20)=\frac{25}{37}.$$

La loi de probabilité de G_3 est :

G_3	-10	20	total
$p(G_3)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{37}{37}$

b) *Calculer l'espérance mathématique et la variance.*

$$E(G_1)=\frac{19}{37}\times(-10)+\frac{18}{37}\times 10=-\frac{1}{37}\times 10=-\frac{10}{37}$$

$$E(G_2)=\frac{36}{37}\times(-10)+\frac{1}{37}\times 350=\frac{-360+350}{37}=-\frac{10}{37}$$

$$E\left(\mathrm{G}_3\right)=\frac{25}{37}\times(-10)+\frac{12}{37}\times 20=\frac{-250+240}{37}=-\frac{10}{37}$$

$$V\left(\mathrm{G}_1\right)=\frac{19}{37}\times(-10)^2+\frac{18}{37}\times 10^2-\left(-\frac{10}{37}\right)^2=\frac{1900}{37}+\frac{1800}{37}-\frac{100}{1369}=\frac{136800}{1369}\simeq 99,93$$

$$V\left(\mathrm{G}_2\right)=\frac{36}{37}\times(-10)^2+\frac{1}{37}\times 350^2-\left(-\frac{10}{37}\right)^2=\frac{3600}{37}+\frac{122\,500}{37}-\frac{100}{1369}\simeq 3408,04$$

$$V\left(\mathrm{G}_3\right)=\frac{25}{37}\times(-10)^2+\frac{12}{37}\times 20^2-\left(-\frac{10}{37}\right)^2=\frac{2500}{37}+\frac{4800}{37}-\frac{100}{1369}=\frac{270\,000}{1369}\simeq 197,22$$

2) *Comparer les espérances et les variances.*
Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de "gagner une grosse somme" ?

Ces trois stratégies proposent le même taux de succès mis en évidence par les espérances identiques.

La dispersion des gains est la plus faible pour la première stratégie : il y aura très peu de gros gagnants et de gros perdants.

La dispersion des gains est la plus forte avec la deuxième stratégie : il y aura quelques gros gagnants et quelques gros perdants.