Suites

I Suites numériques

1- Définition

Définition :

Une **suite numérique** (U_n) est une liste ordonnée de nombres réels n à qui on associe un nombre réel noté U_n.

U_n est appelé le **terme de rang n** de cette suite (ou d'indice n).

Exemples :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 27 … est le début de la suite des nombres premiers.

On note (U_n) l'ensemble des termes de cette suite de nombres tel que :

$U_0 = 2$; $U_1 = 3$; $U_2 = 5$; $U_3 = 7$; $U_4 = 11$; $U_5 = 13$ …

Remarque : Une suite est assimilable à une fonction, et possède donc un ensemble de définition.

2- Génération d'une suite numérique

a- En fonction de la variable n

Propriété :

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, on exprime chaque terme de la suite en fonction de n (et indépendamment des termes précédents)

Exemples :

- Pour tout entier naturel n, $U_n = n^2 - 4$
  Le premier terme sera $U_0 = 0^2 - 4 = -4$
  Le second terme sera $U_1 = 1^2 - 4 = -3$
  Le troisième terme sera $U_2 = 2^2 - 4 = 0$

- Pour tout entier naturel n non nul, $U_n = 5 + \frac{2n+1}{n}$
  Le premier terme sera $U_1 = 5 + \frac{2*1+1}{1} = 8$
  Le second terme sera $U_2 = 5 + \frac{2*2+1}{2} = 7{,}5$
  Le dixième terme sera $U_{10} = 5 + \frac{2*10+1}{10} = 7{,}1$

Application : Exercice 1

b- Par récurrence

> Propriété :
>
> Pour générer une suite par récurrence, on donne le premier terme ainsi qu'une relation permettant de passer d'un terme au suivant.

Exemples :

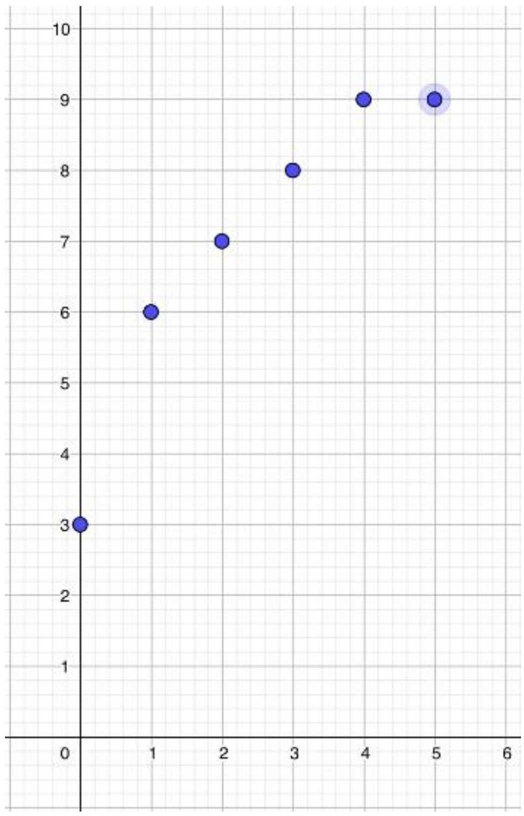
- Pour tout entier naturel n, on pose $U_0 = 2\ et\ U_{n+1} = 1 + 2U_n$
  Le premier terme est donné, c'est $U_0 = 2$
  Le second terme sera $U_1 = 1 + 2 \times U_0 = 1 + 2 \times 2 = 5$
  Le troisième terme sera $U_2 = 1 + 2 \times U_1 = 1 + 2 \times 5 = 11$

- Pour tout entier naturel n, on pose $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 3 + 4U_n$
  Le premier terme est donné, c'est $U_0 = 0$.
  Le second terme sera $U_1 = 3 + 4U_0 = 3 + 4 \times 0 = 3$.
  Le troisième terme sera $U_2 = 3 + 4U_1 = 3 + 4 \times 3 = 15$

Remarque : Il est nécessaire d'avoir calculer le terme précédent pour avoir le suivant, si l'on ne dispose que de cette relation de récurrence.

Application : Exercice 2

3- Représentation graphique et variations



Soit une suite (U_n).

Dans un repère, la représentation graphique de la suite (U_n)

est l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\,U_n)$.

n	0	1	2	3	4	5
U_n	3	6	7	8	9	9

Peu importe la suite étudiée, on peut calculer la valeur de quelques termes et les regrouper dans un tableau de valeurs.

Définition :

Soit une suite numérique (U_n).

- La suite (U_n) est **croissante** lorsque pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \geq U_n$, c'est-à-dire lorsque ses termes sont de plus en plus grands.

- La suite (U_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \leq U_n$, c'est-à-dire lorsque ses termes sont de plus en plus petits.

Exemple : Soit (U_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n - 4$

Puisqu'on retire 4 à U_n, on en déduit que $U_{n+1} \leq U_n$ et par conséquent que la suite (U_n) est décroissante.

Application : Exercice 3

Ii Les suites arithmétiques

1- Définition et représentation

Définition :

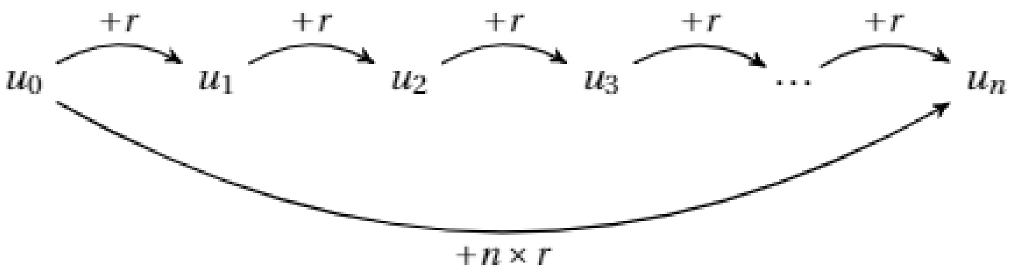
Une suite (U_n) est **une suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n :

- $U_{n+1} = U_n + r$

- $U_n = U_0 + nr$

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

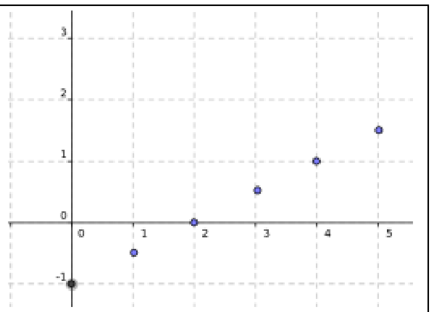
Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points alignés de coordonnées $(n\,;U_n)$.



Application : Exercice 4

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

Application : Exercice 5

III Les suites géométriques

1- Définition et représentation

Définition :

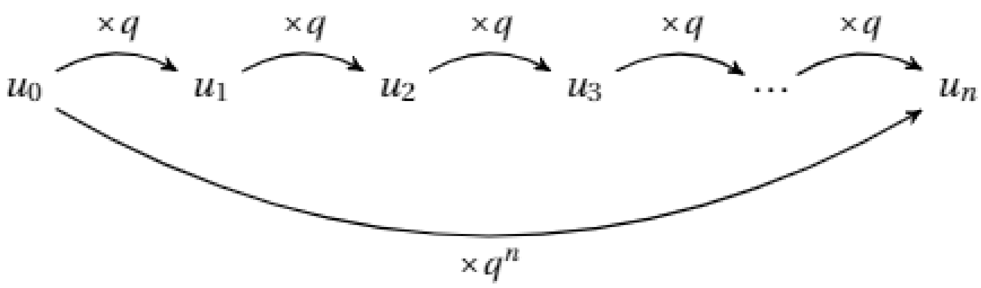
Une suite (U_n) est **une suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n :

- $U_{n+1} = q \times U_n$.

- $U_n = U_0 \times q^n$

Le réel q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Schématiquement, on peut représenter une suite géométrique de la façon suivante :

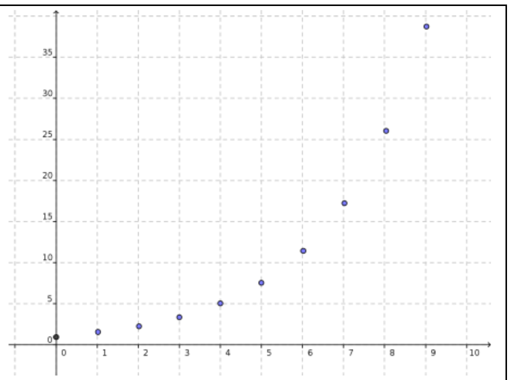


Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points de coordonnées $(n\,;U_n)$.

Pour une suite géométrique, on parle de **croissance (ou décroissance) exponentielle**.



Application : Exercice 6

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

Application : Exercice 7