Les suites arithmétiques et géométriques

I Les suites arithmétiques

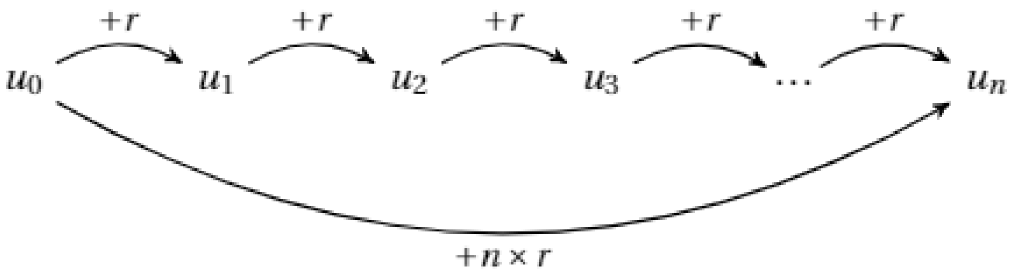
1 - Définition et propriétés

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



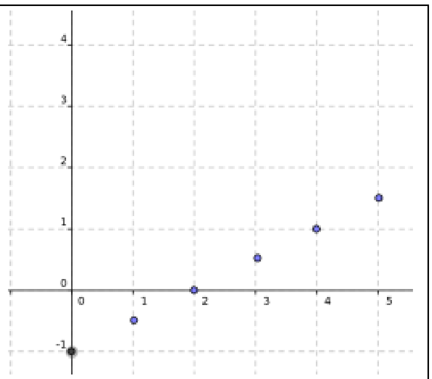
Dans une suite arithmétique, on passe donc d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r.

Exemple : La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 0$

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points alignés de coordonnées $(n\,;U_n)$.



Remarque : la représentation graphique d'une suite arithmétique est la même que celle d'une fonction affine.

Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = n \times \frac{U_1 + U_n}{2}$$

Propriété :

Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on applique la formule suivante :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (Nombre\ de\ termes) \times \frac{(Premier\ terme) + (Dernier\ terme)}{2}$$

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

<u>Démonstration</u> : La suite (U_n) étant arithmétique de raison r, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.

Ainsi on en déduit que $U_{n+1} - U_n = r$

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $r = 0$ alors $U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante

II Les suites géométriques

1- Définition et représentation

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = q \times U_n$.

Le réel q est appelé **<u>raison</u>** de la suite géométrique.

Schématiquement, on peut représenter une suite géométrique de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n
\end{tikzcd}$$

Dans une suite géométrique, on passe donc d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre q.

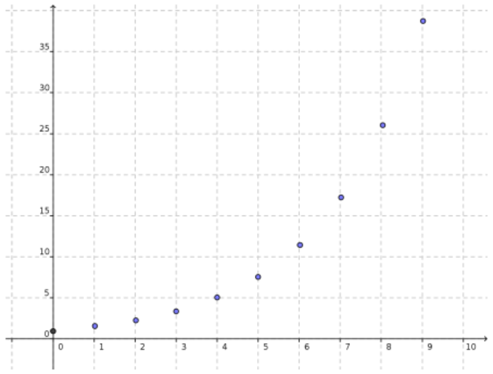
<u>Exemple</u> : La suite définie par $U_{n+1} = 2 \times U_n$ avec $U_0 = 1$ est une suite géométrique de raison $q = 2$. Les premiers termes de cette suite sont 1, 2, 4, 8…

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points de coordonnées $(n\,;U_n)$.

Pour une suite géométrique, on parle de **croissance (ou décroissance) exponentielle**.



Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Propriété :

Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on applique la formule suivante :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (Premier\ terme) \times \frac{1-(raison)^{nombre\ de\ termes}}{1-raison}$$

2- <u>Sens de variation</u>

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

<u>Démonstration</u> : La suite (U_n) étant géométrique de raison q, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \ q \times U_n$.

Ainsi on en déduit que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

- Si $q > 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow U_n < U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $q = 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante.