FONCTION DU SECOND DEGRE

(Exercices)

Activité découverte

Un magasin d'informatique vend des unités de stockage haut de gamme sous forme de cartes, pouvant contenir entre 1 et 10 Go (gigaoctets). Pour chaque carte, on s'intéresse au prix moyen du Go. Par exemple, une carte de 2 Go est vendue 48 €, soit un prix moyen au Go de 24 €, alors qu'une carte de 8 Go est vendue 288 € soit un prix moyen de 36 € par Go.

Plus précisément, si on note x la capacité de stockage en Go d'une carte, son prix moyen par Go est donné par l'expression : $f(x) = -x^2 + 12x + 4$ pour x appartenant à [1; 10].

1/ Calculer $f(2)$ et $f(8)$ et interpréter les résultats obtenus.

Vaut-il mieux acheter une carte de 8 Go ou quatre cartes de 2 Go ?...

2/ Construire un tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs entières de x comprises entre 1 et 10.

3/ Représenter graphiquement la fonction f. (En abscisse 1 cm pour 1 Go ; en ordonnée 1 cm pour 5 €).

4/ Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = -(x-6)^2 + 40$.

Comment s'appelle cette forme ? Quel est son lien avec la représentation graphique de f ?

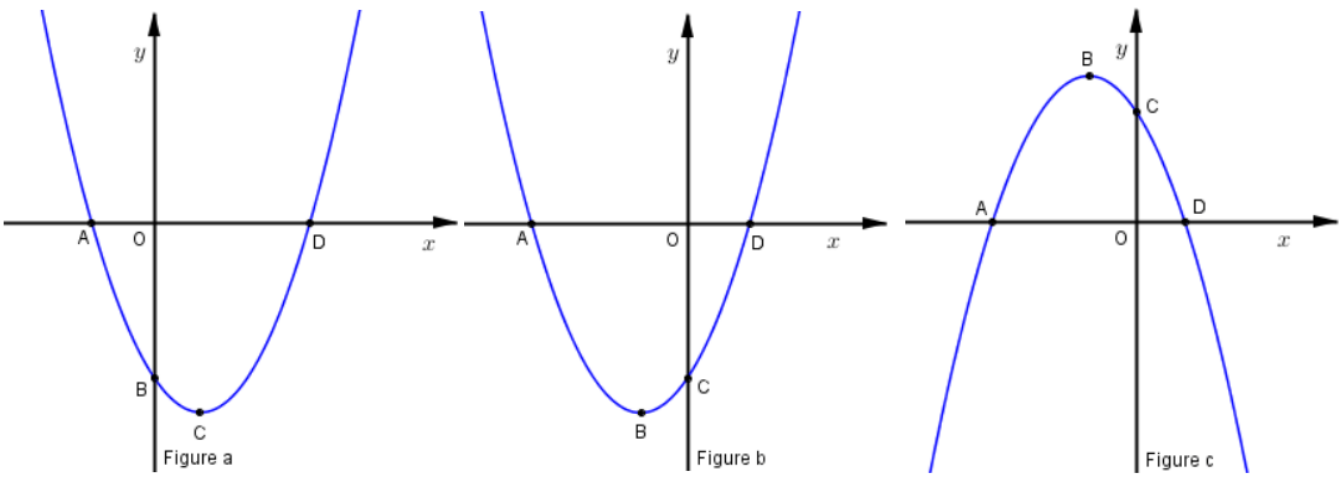
5/ Quelle est la carte dont le prix moyen par Go est le plus élevé ?

6/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 31$ et interpréter le résultat.

Exercice 1

Soit la fonction h définie sur l'ensemble des réels par $h(x) = 5x^2 - 3x - 2$

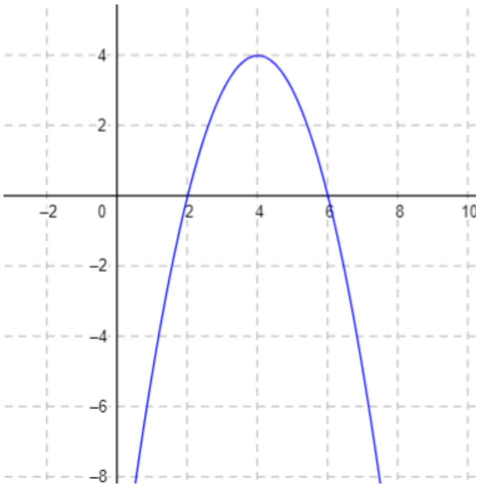
Dire quelle courbe représente la fonction h en justifiant



Exercice 2

1/ Déterminer les solutions x_1 et x_2.

2/ Donner l'expression de la fonction f sous sa forme canonique



Exercice 3

Déterminer les tableaux de variations des fonctions du second degré suivantes :

a/ $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$

b/ $g(x) = x^2 - x + 6$

c/ $h(x) = -3(x+1)^2 - 4$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

1/ $x^2 + 4x + 4 = 0$

2/ $32x^2 + 28x + 3 = 0$

3/ $x^2 + 9x + 9 = 0$

4/ $x^2 = 0$

5/ $x^2 + x - 6 = 0$

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 - 6x + 9$

1/ Calculer le discriminant Δ

2/ En déduire les solutions (racines) de f

3/ Faire le tableau de signes de la fonction f

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$

1/ Calculer le discriminant Δ

2/ En déduire les solutions (racines) de f

3/ Faire le tableau de signes de la fonction f

4/ Faire le tableau de variations de la fonction f

Exercice 7

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-2)^2 - 36$

1/ Dresser le tableau de variations de f

2/ Résoudre l'équation $f(x) = 0$

3/ Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 8

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 2 000 et 18 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Léo, responsable des ventes, veut étudier la rentabilité de son entreprise.

Soit x le nombre de pièces produites, en milliers, les coûts de production sont donnés par la fonction p définie par : $p(x) = 2x^2 - 26x + 102$

Le prix de vente hors taxe d'un composant est 14 €.

1/ Exprimer en fonction de x les recettes $r(x)$ de l'entreprise

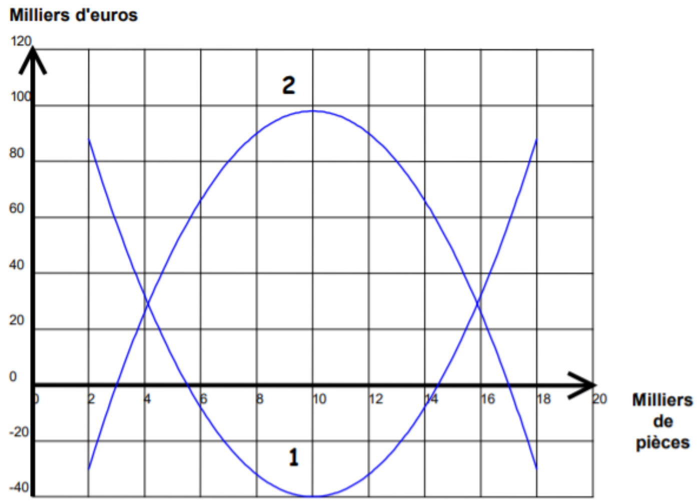
2/ Expliquer pourquoi $r(x) - p(x)$ traduit le chiffre d'affaires correspondant à la fabrication de x milliers de composants électroniques.

3/ Exprimer $r(x) - p(x)$ en fonction de x

4/ On admet que le bénéfice mensuel de l'entreprise est modélisé par la fonction f définie par :

$$c(x) = -2x^2 + 40x - 102$$

Un tracé de sa courbe correspond à l'une des deux représentations ci-dessous.



a/ Laquelle des deux courbes correspond à la fonction ? Pourquoi ?

b/ Déterminer graphiquement le seuil de rentabilité, c'est à dire la quantité minimale de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice. (Attention aux unités)

5/ Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation $c(x) = 0$

Exercice 9

Une entreprise produit des téléphones. Elle a la capacité d'en produire entre 0 et 1 000 par jour.

On note x le nombre de téléphones produits chaque jour.

Les coûts de fabrication journaliers sont donnés en € par la fonction C définie sur $[0 ; 1\,000]$ par :

$$C(x) = 0{,}1\,x^2 + 10\,x + 1500$$

On note $R(x)$ la recette journalière et $B(x)$ le bénéfice journalier.

1/ L'entreprise vend chaque téléphone 87 €. Calculer alors $R(x)$ en fonction de x.

2/ Sachant que le bénéfice est la différence entre la recette et les coûts, en déduire que pour tout $x \in [0 ; 1000]$, on a : $B(x) = -0{,}1\,x^2 + 77\,x - 1500$

3/ Calculer $B(10)$. Que cela signifie pour l'entreprise

4/ L'entreprise souhaite faire un bénéfice journalier positif (c'est-à-dire $B(x) > 0$).

- a- Calculer le discriminant Δ de la fonction B
- b- Déterminer les solutions (racines) de la fonction B et en déduire entre quelles valeurs l'entreprise réalise un bénéfice journalier positif.

5/ L'entreprise souhaite obtenir un bénéfice journalier maximal.

- a- Calculer x_0 l'abscisse du sommet de la parabole associée à B
- b- Calculer alors le bénéfice maximal que peut obtenir l'entreprise

Exercice 10

Un artisan fabrique des confitures qu'il vend par carton de dix pots. Le coût en euros de fabrication de x cartons de dix pots est $f(x) = 0{,}25x^2 + 500$, pour x compris entre 0 et 160.

1/a/ Déterminer le coût de fabrication de 60 cartons de dix pots de confiture.

1/b/ Pour combien de cartons le coût de fabrication est de $2\,525$ € ?

2/ Chaque carton de confitures est vendu 30 €. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.

3/ Soit B la fonction bénéfice définie sur l'intervalle $[0\,;160]$

a/ Montrer que, pour tout $x \in [0\,;160]$: $B(x) = -0{,}25x^2 + 30x - 500$
b/ Montrer que, pour tout $x \in [0\,;160]$: $B(x) = -0{,}25(x - 100)(x - 20)$

4/ Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan s'il veut réaliser un bénéfice positif ?

5/ Quel est le nombre de cartons à vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Calculer alors ce bénéfice ?

Exercice 11

L'entreprise Saveur fabrique et commercialise de l'extrait de parfum. Elle est en capacité d'en produire jusqu'à 34 hectolitres par mois. On suppose que toute la production est vendue. On modélise le coût de production mensuel, en centaines d'euros, de x hectolitres d'extrait de parfum par la fonction C définie par $C(x) = 2x^2 + 12x + 240$, où $x \in [0\,;34]$.

Chaque hectolitre d'extrait de parfum est vendu 80 centaines d'euros.

1/a/ Calculer le coût de production mensuel et la recette réalisée par l'entreprise lorsqu'elle produit 6 hectolitres d'extrait de parfum dans le mois.

1/b/ L'entreprise réalise-t-elle un profit lorsqu'elle produit et vend 6 hectolitres d'extrait de parfum par mois ?

2/ Démontrer que le bénéfice, en centaines d'euros, pour la vente de x hectolitres d'extrait de parfum, est donné par la fonction B définie par $B(x) = -2x^2 + 68x - 240$.

3/ Calculer $B(30)$. En déduire la forme factorisée de $B(x)$.

4/ Etudier le signe de $B(x)$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;34]$, et en déduire la quantité d'extrait de parfum à produire et à vendre pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.

5/ Déterminer le montant, en euros, du bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise en vendant cet extrait de parfum.