Fonction inverse

I Rappels

1- Fonction dérivée

Définition :

La fonction, qui a tout réel x, associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f.

Elle se note f'.

Pour dériver une fonction, il faut connaître les formules de dérivation de certaines fonctions :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

On peut également utiliser des formules d'opération sur les fonctions dérivées :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$

Application : Exercice 1

2- Dérivée d'une fonction du second degré

Définition :

Soit f une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f'(x) = a \times 2x + b}$

Exemple :

On cherche la dérivée de la fonction $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$

En appliquant les formules de dérivation, on a : $f'(x) = 4 \times 2x - 6 + 0$

Donc : $f'(x) = 8x - 6$

3- Dérivée d'une fonction polynôme de degré 3

Définition :

Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c}$

Exemple :

On cherche la dérivée de la fonction $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$

En appliquant les formules de dérivation, on a : $g'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 2$

Donc : $g'(x) = 15x^2 + 4x + 2$

4- Variations d'une fonction polynôme

Définition :

En étudiant le signe de la dérivée d'une fonction f, on peut en déduire les variations de la fonction f :

- Si $f'(x)$ est positif, alors la fonction f est croissante.

- Si $f'(x)$ est négatif, alors la fonction f est décroissante.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$

- On cherche d'abord la dérivée : $f'(x) = 2x - 2$

- Pour ensuite, étudier son signe en résolvant l'équation $f'(x) = 0$

$$2x - 2 = 0$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

La fonction f' s'annule donc pour $x = 1$ et elle est négative entre $]-\infty\,;1]$ et positive entre $[1\,;\,+\infty[$ puisque son coefficient directeur est positif.

- Enfin, on dresse le tableau de variations de la fonction f en appliquant la définition :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	2	↗	

$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$

Application : Exercice 2

II Définition et représentation graphique

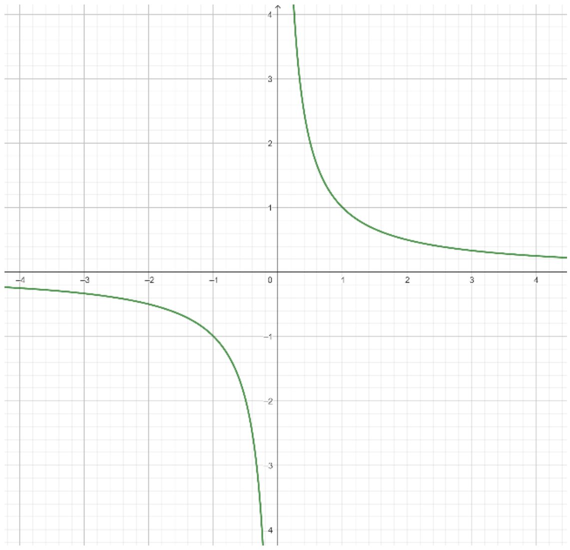
Définition :

La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Représentation graphique :

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	-2	$\emptyset$	2	1	$0{,}5$

La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ est une **hyperbole** de centre O et est symétrique par rapport à l'origine.



III Dérivée et sens de variation

Propriété :

La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Etude du signe de la dérivée :

- 1 est positif
- x^2 est positif puisqu'un carré est strictement positif sur $\mathbb{R}$

Par conséquent le signe de la fonction dérivée f' est négatif.

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$

Application : Exercice 3

IV Aux bornes de son ensemble de définition

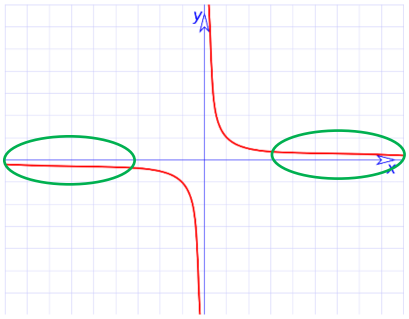
1- En $-\infty$ et $+\infty$

x	$-100\,000$	$-10\,000$	-100	-10	-1	…	1	10	100	$10\,000$	$100\,000$
$f(x)$	$-0{,}00001$	$-0{,}0001$	$-0{,}01$	$-0{,}1$	-1	…	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}0001$	$0{,}00001$

Grâce à ce tableau de valeurs, on constate que :

- Plus la valeur de x est petite quand il est négatif, plus $f(x)$ se rapproche de 0.

- Plus la valeur de x est grande quand il est positif, plus $f(x)$ se rapproche de 0.



On dit que :

- La limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Graphiquement, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

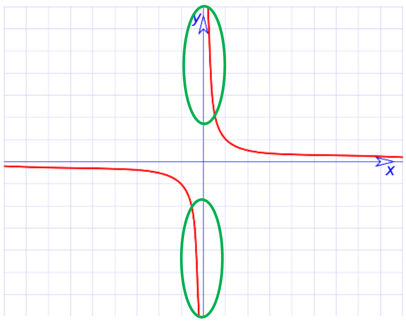
Définition :
L'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$

2- En zéro

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	$\emptyset$	1000	100	10	1

Grâce à ce tableau de valeurs, on constate que :

- Plus la valeur de x est proche de 0 quand x est négatif, plus $f(x)$ est petit.
- Plus la valeur de x est proche de 0 quand x est positif, plus $f(x)$ est grand.



On dit que :

- La limite de f lorsque x tend vers 0, pour x positif, est égale à $+\infty$: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- La limite de f lorsque x tend vers 0, pour x négatif, est égale à $-\infty$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Graphiquement, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

Définition :
L'axe des abscisses est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse en 0.

Application : Exercice 4