Loi uniforme et loi normale (Exercices)

Exercice 1

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;4]$

1/ Donner la fonction de densité de X

2/ Déterminer les probabilités suivantes :

a/ $P(X \in [1\,;3])$	b/ $P(X \leq 2{,}5)$	c/ $P(0{,}2 \leq X \leq 3{,}5)$
d/ $P(X \leq 1)$	e/ $P(X = 1)$	f/ $P(X > 1)$

3/ Déterminer l'espérance de X

4/ Déterminer la variance de X

Exercice 2

Le standard téléphonique d'un grand magasin limite la durée d'attente en transférant le plus vite possible les appels sur d'autres postes.

On s'intéresse aux appels dont la durée d'attente est comprise en 10 secondes et 1 minute. On note T la variable aléatoire qui, à un tel appel pris au hasard, associe la durée de l'attente.

1/ On admet que T suit une loi uniforme, mais sur quel intervalle ?

2/ Donner la fonction de densité de T

3/ Déterminer les probabilités suivantes :

a/ $P(A)$ où A est l'évènement « la durée de l'attente pour un tel appel pris au hasard est inférieure à 20 secondes »

b/ $P(B)$ où B est l'évènement « la durée de l'attente pour un tel appel pris au hasard est supérieure à 40 secondes »

c/ $P(C)$ où C est l'évènement « la durée de l'attente pour un tel appel pris au hasard est comprise entre 20 et 40 secondes »

4/ Déterminer l'espérance $E(T)$

5/ Déterminer la variance $V(T)$

6/ Déterminer l'écart-type $\sigma(T)$

Exercice 3

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\,5)$.

1/ Retrouver à la calculatrice les valeurs approchées : $P(X \leq 28) \approx 0{,}945$ et $P(X \leq 12) \approx 0{,}055$

2/ En déduire une valeur approchée de $P(12 \leq X \leq 28)$

Exercice 4

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(10\,;\,2)$. Calculer les probabilités suivantes :

1/ $P(X \leq 8)$ et $P(X > 8)$

2/ $P(9 \leq X \leq 12)$ et $P(7 \leq X \leq 14)$

Exercice 5

1/ X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(50\,;0{,}7)$

a/ Calculer $P(X \leq 40)$ et $P(X \leq 29)$
b/ En déduire $P(30 \leq X \leq 40)$

2/ On décide d'approcher la loi de X par une loi normale.

a/ Déterminer les paramètres μ et σ de cette loi normale (arrondir à 10^{-2} près).
b/ Y étant une variable aléatoire suivant cette loi normale, calculer $P(30 \leq Y \leq 40)$
c/ Comparer les résultats obtenus aux questions 1/b/ et 2/b/

Exercice 6

On arrondira toutes les probabilités calculées à 10^{-4}.

Une enquête permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, prélevée au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, le lendemain, est $0{,}7$.

Dans la suite, on ne considère que les lettres à destination de la France.

A l'agence de Marne-la-Vallée d'une grande entreprise, on admet que l'on expédie 100 lettres par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour tiré au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres sont indépendants.

Partie A : Loi binomiale

1/ Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2/ Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur de l'écart-type de X

3/ Calculer la probabilité que 60 lettres exactement, sur les 100 expédiées un jour tiré au hasard parviennent à leur destinataire le lendemain.

Partie B : Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par la loi normale de paramètres μ et σ.

1/ Donner les valeurs de μ et σ.

2/ On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale. En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres, expédiées un jour tiré au hasard, parviennent à leur destinataire le lendemain, c'est-à-dire $P(Y \geq 79{,}5)$.

3/ Calculer la probabilité que le nombre de lettres, sur 100 expédiées un jour choisi au hasard, parviennent à leur destinataire le lendemain, soit compris entre 55 et 85, c'est-à-dire $P(54{,}5 \leq Y \leq 85{,}5)$.

Exercice 7

Les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent respectivement les lois normales : $\mathcal{N}(22\,;4)$ et $\mathcal{N}(18\,;3)$.

Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$. On admet que Z suit une loi normale.

1/ Montrer que l'espérance mathématique et l'écart-type de Z sont respectivement 40 et 5.

2/ Calculer la probabilité de l'évènement « $30 \leq Z \leq 48$ »

Exercice 8

Les trois parties sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande quantité des sacs poubelle.

Partie A : Probabilités conditionnelles

On admet que 3% des sacs de la production présentent un défaut. On contrôle les sacs d'un lot. Ce contrôle refuse 94% des sacs avec défaut et accepte 92% des sacs sans défaut.

On prélève un sac au hasard dans le lot.

On considère les évènements suivants :

- D : « Le sac a un défaut »
- A : « le sac est accepté à l'issue du contrôle »

1/ Déduire de ces informations figurant dans l'énoncé les probabilités suivantes :

$$P(D), P_D(\bar{A}), P_{\bar{D}}(A)$$

2/ Déterminer $P_D(A)$

3/ Calculer $P(A \cap D)$ et $P(A \cap \overline{D})$

4/ En déduire $P(A)$

5/ Calculer la probabilité qu'un sac soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle (arrondir à 10^{-3} près)

Partie B : Loi binomiale

On note E l'évènement : « un sac prélevé au hasard dans une grosse livraison pour une municipalité n'a pas de défaut ».

On suppose que la probabilité de E est $0{,}97$.

On prélève au hasard 10 sacs de cette livraison pour vérification. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 sacs.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 sacs, associe le nombre de sacs sans défaut de ce prélèvement.

1/ Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et déterminer ses paramètres.

2/ Calculer la probabilité que dans un tel évènement, tous les sacs soient sans défaut.

3/ Calculer la probabilité que dans un tel évènement, exactement 9 sacs soient sans défaut.

4/ Calculer la probabilité que dans un tel évènement, au moins 9 sacs soient sans défaut.

Partie C : Loi normale

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque sac prélevé au hasard dans la production, associe la masse maximale, en kilogrammes, qu'il peut supporter sans se déchirer.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart-type $0{,}4$.

1/ Calculer $P(4{,}6 \leq Y \leq 5{,}4)$

2/ Déterminer le nombre réel positif h tel que : $P(Y \leq 5 + h) = 0{,}95$

Interpréter le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.