

Logarithme décimal

I Généralités

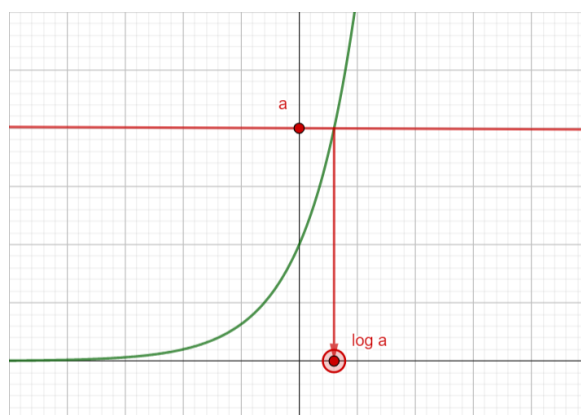
1 - Définition

Définition :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 10^x$

On appelle **logarithme décimal** d'un réel a strictement positif, l'unique solution de l'équation $10^x = a$
Cette solution se note $\log(a)$

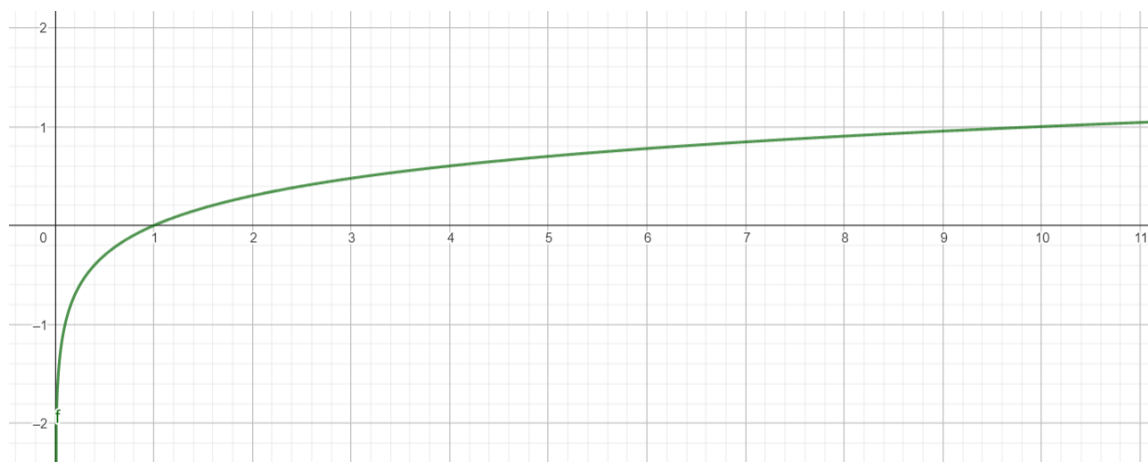
La fonction **logarithme décimal** qui à tout nombre x strictement positif associe $\log x$ se note **log**.



Remarque : Pour trouver des valeurs, il faudra utiliser la touche « log » de la calculatrice.

2 - Sens de variation et représentation graphique

Représentation graphique



Propriété :

La fonction logarithme décimal est **croissante** sur $]0 ; +\infty[$

Remarque : On constate sur le graphique des valeurs particulières

- $\log(1) = 0$
- $\log(10) = 1$

3- Propriétés algébriques

Propriétés :

Soient x et y des réels strictement positifs et n un entier naturel :

$$1/ \log(x) + \log(y) = \log(x \times y)$$

$$3/ \log(x^n) = n \log(x)$$

$$2/ \log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$4/ \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$$

Application : Exercices 1 et 2

II Résolutions d'équations et d'inéquations

1- Résolution d'équations avec un logarithme

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'équation proposée pour obtenir le résultat suivant : $\log x = a$

La solution de $\log x = a$ est $x = 10^a$

Exemple : Résoudre l'équation $\log(x^2) - \log(x) = 1$

$$\log(x^2) - \log(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{x^2}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\log(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$10^{\log(x)} = 10^1 \Leftrightarrow$$

$$x = 10$$

Application : Exercice 3

2- Résolution d'inéquations

a- $\log x \leq a$

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'inéquation proposée pour obtenir le résultat suivant : $\log x \leq a$

La solution de $\log x \leq a$ est $x \leq 10^a$. L'ensemble de solutions est donc $S =]0 ; 10^a]$

b- $\log x \geq a$

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'inéquation proposée pour obtenir le résultat suivant : $\log x \geq a$

La solution de $\log x \geq a$ est $x \geq 10^a$. L'ensemble de solutions est donc $S = [10^a ; +\infty[$

3- Résolution d'équations avec une exponentielle de base a

Peu importe l'exercice, il s'agira de développer et réduire l'équation proposée pour obtenir le résultat suivant : $a^x = b$

La solution de $a^x = b$ est $x = \frac{\log b}{\log a}$

Exemple :

L'évolution d'un capital de 2 000 € placé à 4% d'intérêt annuel en fonction du nombre n d'années est donné par la formule $2000 \times 1,04^n$

Au bout de combien d'années ce capital est-il doublé ?

On cherche à résoudre $2000 \times 1,04^n \geq 4000$

$$2000 \times 1,04^n \geq 4000 \Leftrightarrow$$

$$1,04^n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\log(1,04^n) \geq \log 2 \Leftrightarrow$$

$$n \log 1,04 \geq \log 2 \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\log 2}{\log 1,04} \Leftrightarrow$$

$$n \geq 18$$

Il faudra donc 18 ans pour doubler son capital placé à 4% d'intérêt annuel.

Application : Exercice 4