Loi uniforme et loi normale

I Variable aléatoire continue (ou à densité)

1- Définition

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est tout un intervalle.

Exemple : Une machine fabrique des tiges de bois de longueurs aléatoires comprises entre $1\ cm$ et $3\ cm$. On considère la variable aléatoire X qui à une tige associe sa longueur. L'ensemble des valeurs prises par X est bien tout un intervalle.

2- Fonction de répartition

En reprenant l'exemple précédent, on est bien en présence d'une variable aléatoire X dite continue.

Cependant, pour tout réel x, on a $P(X = x) = 0$.

Or, $P(1 \leq X \leq 3) = 1$.

On ne peut donc pas définir X par l'ensemble des valeurs $P(X = x)$.

C'est pourquoi on définit X par les valeurs $P(X \leq x)$. C'est le rôle de la fonction de répartition.

Définition :

Soit X une variable aléatoire continue. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriété :

La définition nous permet d'écrire :

- $F(x) = P(X \in]-\infty\,;\,x])$

- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

- $P(X > b) = P(\overline{X \leq b}) = 1 - F(b)$

Remarque :

On admet que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 0$.

On a donc :

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$
- $P(a < X) = P(a \leq X < b)$
- $P(X > b) = P(X \geq b)$

Propriété :

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :

- F est une fonction croissante, définie et continue sur R.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

3- Densité et loi de probabilité

Définition :

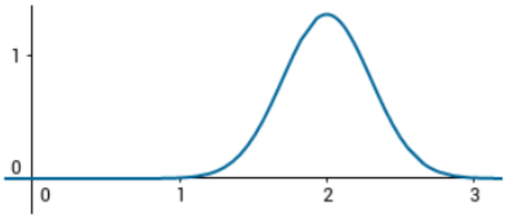
La fonction f dérivée de F est la **densité de probabilité** de X. On a alors $F'(x) = f(x)$

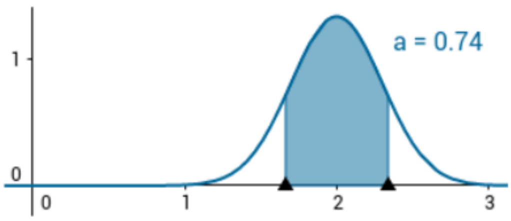
Exemple :

On représente ci-contre une densité de probabilité pouvant convenir à l'exemple précédent. La densité de probabilité permet de se faire rapidement une idée de la répartition des valeurs.

Pour déterminer une probabilité du type $P(a \leq X \leq b)$, on calcule l'aire sous la courbe représentative de f.

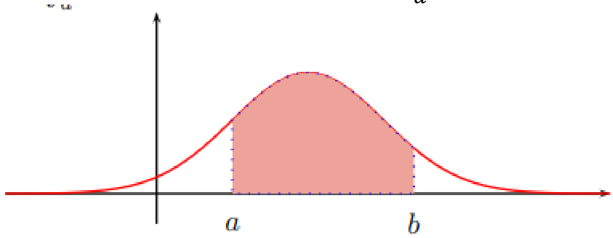
Ci-contre on a : $P(1{,}66 \leq X \leq 2{,}34) = 0{,}74$.



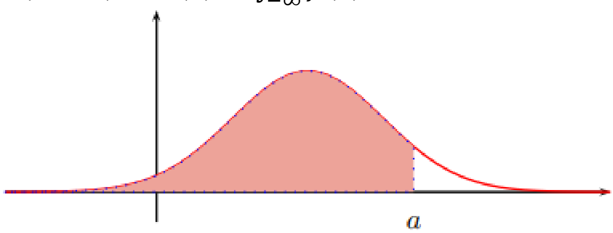


Remarques :

- F étant une fonction croissante, f est positive
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$



- $P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$



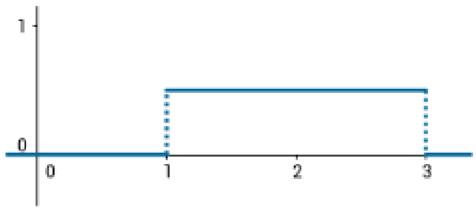
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- Graphiquement, le calcul d'intégrale correspond à l'aire entre l'axe des abscisses, et la courbe.

II Loi uniforme

Définition :

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a\,;b]$ notée $\mathcal{U}(a;b)$, lorsque la densité de probabilité de f est définie par :

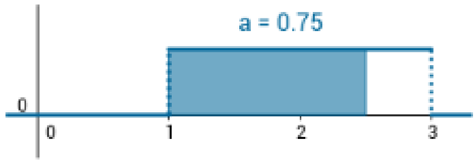
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si\ a \leq x \leq b \\ 0, & sinon \end{cases}$$



Exemple : Soit la loi uniforme X sur l'intervalle $[1\,;3]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & si\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Calculons $P(X < 2{,}5) = (2{,}5 - 1) \times \frac{1}{2} = 0{,}75$



Remarque : Pour calculer l'aire en bleu, il suffit d'appliquer la formule de l'aire d'un rectangle.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $[a\,;b]$. On admet alors que :

- L'**espérance** de X est : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

- La **variance** de X est : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

- L'**écart-type** de X est : $\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

Exemple : En suivant toujours avec le même exemple on a :

- $E(X) = \frac{1+3}{2} = 2$
- $V(X) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$

Application : Exercices 1 et 2

III Loi normale

1- Définition

Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ est d'écart-type σ notée $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, lorsque la densité de probabilité est définie par :

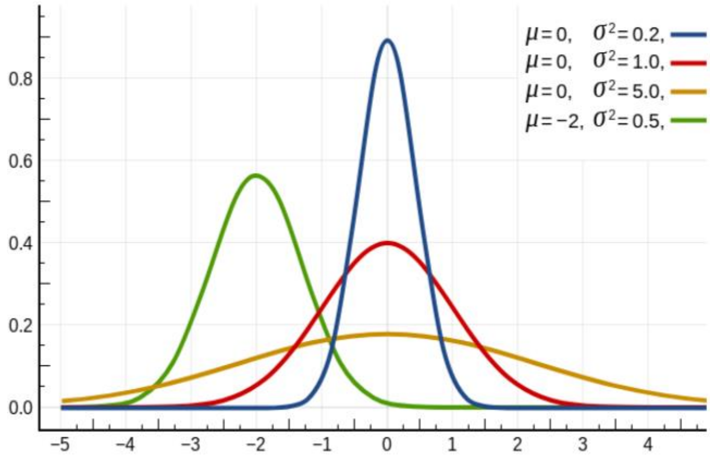
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Exemples :

La courbe représentative de la densité de probabilité est appelée une courbe de Gauss, ou courbe dite « en cloche ».

Elle admet un axe de symétrie d'équation $x = \mu$.

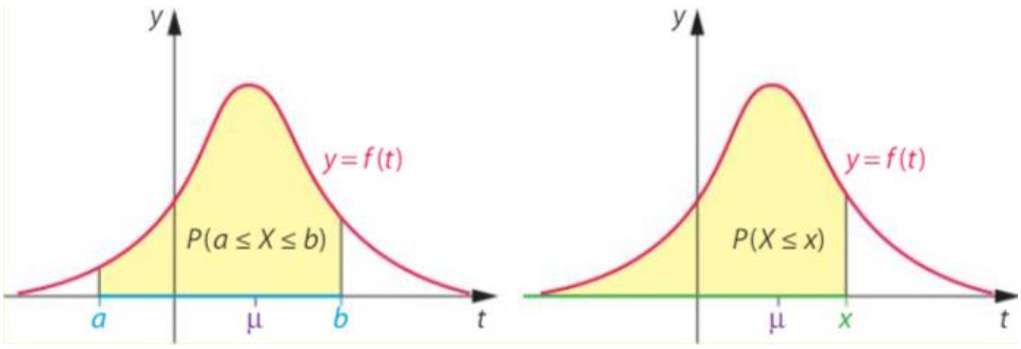
Pour une même valeur de μ, l'allure de la courbe est plus ou moins resserrée suivant que σ est plus ou moins petit.



2- Calcul des probabilités

Comme pour une loi uniforme sur $[a, b]$, une probabilité avec la loi normale est l'aire d'une partie du plan située sous la représentation graphique de la fonction de densité.

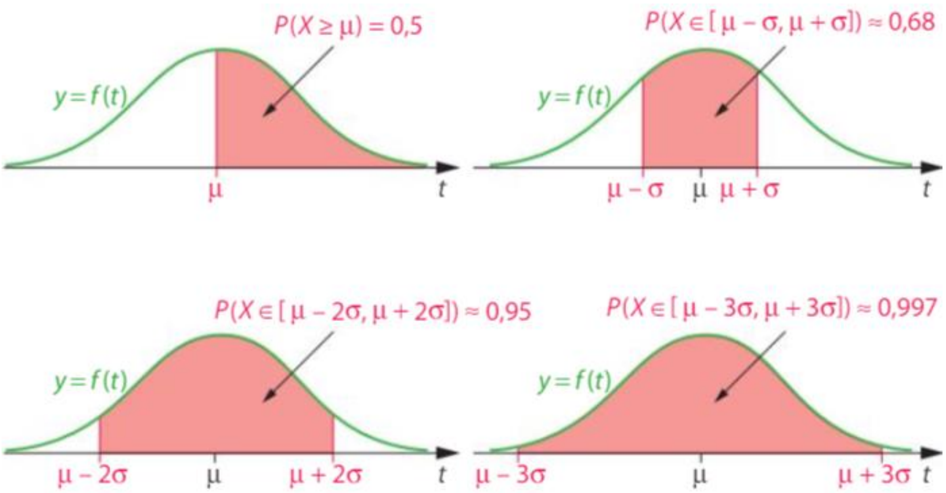
Exemple : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$ de fonction de densité f.



Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq x \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ (par la calculatrice ou le tableur) et en remarquant que :

$$P(a \leq x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Remarque : Certains résultats restent vrais quelles que soient les valeurs de l'espérance μ et de l'écart-type σ. Ils sont à connaître par cœur.



Pour calculer n'importe quelle autre probabilité, il faut utiliser le tableur ou la calculatrice. Pour cette dernière, voici les méthodes à appliquer : Casio (Lycée) ou Texas Instruments (Lycée)

Application : Exercices 3 et 4

IV Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Définition :

Soit n et p les paramètres d'une loi binomiale.

Si n est « grand » et si p n'est « ni trop voisin de 0 ni trop voisin de 1 », alors **la loi binomiale $\boldsymbol{B(n,p)}$ admet pour approximation la loi normale $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)}$** de même espérance et de même écart-type :

$$\mu = np \text{ et } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Remarque :

Généralement, pour avoir une approximation correcte, on vérifie que :

- $n > 30$
- $np > 5$
- $n(1-p) > 5$

Il faut également tenir compte de la correction de continuité.

Propriété :

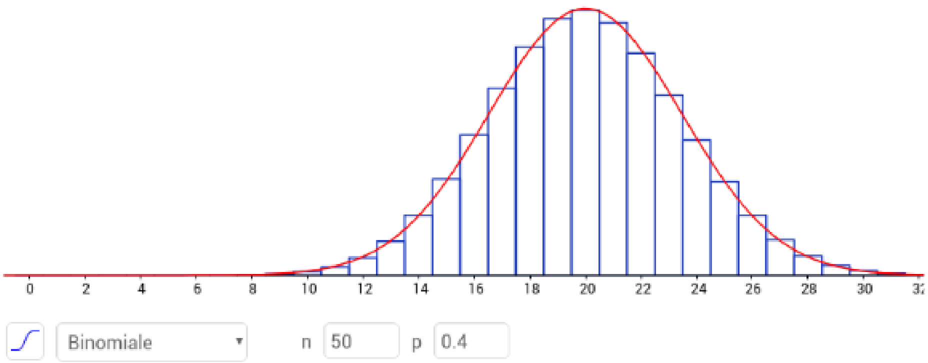
La **correction de continuité** consiste à remplacer tout nombre entier k par un intervalle d'extrémités $k - \frac{1}{2}$ et $k + \frac{1}{2}$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(50; 0,4)$.

On peut approcher cette loi binomiale par une loi normale de moyenne $\mu = 50 \times 0,4 = 20$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{50 \times 0,4 \times (1 - 0,4)} \approx 3,4641$

Ci-dessous est représentée l'approximation de la loi $B(50\,; 0,4)$ par la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\ 3,46)$ à l'aide du logiciel GeoGebra :



Notons Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\ 3,46)$

- pour approcher $P(X \leq 22)$, on calcule $P(Y \leq 22,5)$
- pour approcher $P(X \geq 16)$, on calcule $P(Y \geq 15,5)$
- pour approcher $P(18 \leq X \leq 22)$, on calcule $P(17,5 \leq Y \leq 22,5)$

V Complément sur espérance et variance

1- Espérance et variance de $aX + b$

Propriété :

X étant une variable aléatoire, et a et b deux nombres réels,

$\boldsymbol{E(aX + b) = aE(X) + b}$ **et** $\boldsymbol{V(aX + b) = a^2V(X)}$

Exemple : On note X la variable aléatoire qui à tout instant appartenant à un certain intervalle de temps, associe le prix unitaire, en euros, d'un produit. On suppose que $E(X) = 400$ € et $\sigma(X) = 80$ €.

Une entreprise achète régulièrement 30 unités de ce produit, chaque achat produisant des frais fixes d'un montant de 200 €.

La variable aléatoire $Y = 30X + 200$ associe à chaque instant le montant total d'un tel achat incluant les frais fixes.

On a donc :

- $E(Y) = 30 \times E(X) + 200 = 30 \times 400 + 200 = 12\,200$ €
- $V(Y) = 30^2V(X)$ et $\sigma(Y) = 30\sigma(X) = 30 \times 80 = 2\,400$ €

2- Somme de deux variables aléatoires

Exemple : Deux représentants A et B d'une même entreprise travaillent en équipe pendant un mois pour proposer des contrats à d'éventuels clients : A est chargé de placer de nouveaux contrats à des clients actuels de l'entreprise, tandis que B doit prospecter de nouveaux clients.

Soit X et Y les variables aléatoires mesurant le nombre de contrats obtenus respectivement par A et B au cours d'une demi-journées ouvrable choisie au hasard dans le mois.

On suppose que X prend des valeurs dans $\{0\,;1\,;2\,;3\}$, que Y prend des valeurs dans $\{0\,;1\}$ et que, pour tout élément x de $\{0\,;1\,;2\,;3\}$ et pour tout élément y de $\{0\,;1\}$, la probabilité $P(X = x\ et\ Y = y)$ est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2	3
0	0,05	0,15	0,20	0,10
1	0,10	0,20	0,15	0,05

L'entreprise s'intéresse à la variable aléatoire $X+Y$, mesurant le nombre total de contrats obtenus par l'équipe constituée de A et de B au cours d'une demi-journée choisie au hasard dans le mois considéré. $X+Y$ prend donc ses valeurs dans $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

- L'évènement $X+Y=0$ correspond à $(X=0\ et\ Y=0)$.
  Donc, $P(X+Y)=0{,}05$
- L'évènement $X+Y=1$ correspond à $(X=1\ et\ Y=0)$ ou $(X=0\ et\ Y=1)$.
  Les deux évènements étant incompatibles, on a :
  $P(X+Y=1)=P(X=1\ et\ Y=0)+P(X=0\ et\ Y=1)$
  $P(X+Y=1)=0{,}15+0{,}10$
  $P(X+Y=1)=0{,}25$
- Par un raisonnement identique, on trouve par le calcul que :
  $P(X+Y=2)=P(X=2\ et\ Y=0)+P(X=1\ et\ Y=1)=0{,}40$
  $P(X+Y=3=P(X=3\ et\ Y=0)+P(X=2\ et\ Y=1)=0{,}25$
  $P(X+Y=4)=P(X=3\ et\ Y=1)=0{,}05$

On obtient ainsi la loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire $X+Y$:

k	0	1	2	3	4
P(X+Y=k)	0,05	0,25	0,40	0,25	0,05

3- Espérance et variance de $X+Y$ et $X-Y$

Propriété :

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$

Propriété :

Avec X et Y des variables aléatoires indépendantes, on a $\begin{cases} V(X+Y)=V(X)+V(Y) \\ V(X-Y)=V(X)-V(Y) \end{cases}$