

# Fonction logarithme népérien

## I Définition et propriétés

### 1- Définition

#### Définition :

La fonction **logarithme népérien**, noté  $\ln$ , est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  qui a pour fonction dérivée la fonction qui à  $x$  associe  $\frac{1}{x}$  et qui prend la valeur 0 pour  $x = 1$ .

#### Exemples :

Pour trouver la valeur approchée de  $\ln x$ , il suffit d'utiliser une calculatrice avec la touche  $\boxed{\ln}$ . Ainsi :

$\ln 2 \approx 0,693$  /  $\ln 3 \approx 1,099$  /  $\ln 4 \approx 1,386$  ...

Remarque : Avec un tableur, pour obtenir la valeur numérique de  $\ln 3$  il suffit d'entrer = LN(3)

### 2- Propriétés

#### Propriétés :

Pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$  :

$$- \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$- \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$- \ln a^n = n \ln a$$

$$- \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

Application : Exercice 1

## II Sens de variation et signe

Le tableau de variation de la fonction  $\ln$  est :

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Concernant le signe de la fonction  $\ln$  :

- Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$ .
- Pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $\ln x < 0$ .

Plus généralement on en déduit le sens de variation de la fonction  $\ln$  les équivalences suivantes :

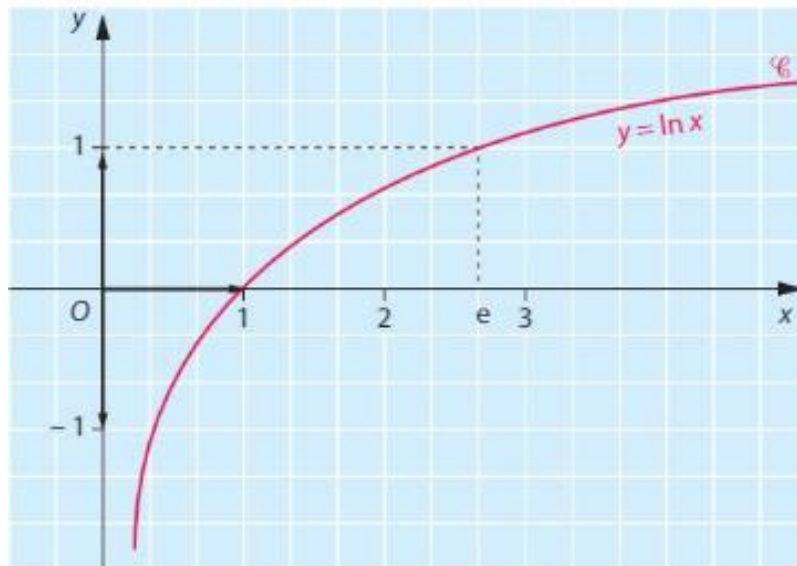
Pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$  :

-  $\ln a = \ln b$  si et seulement si  $a = b$

-  $\ln a \leq \ln b$  si et seulement si  $a \leq b$

### III Courbe représentative

Pour tracer la courbe représentative de la fonction  $\ln$  dans le plan muni d'un repère orthonormé, on détermine les coordonnées d'autant de points que l'on veut à l'aide de la calculatrice.



On observe graphiquement sur la figure qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1 et pour abscisse  $e$ . Ce nombre  $e$  équivaut environ à 2,718...

**Définition :**

$e$  est le nombre réel défini par  $\ln e = 1$

Remarque :

En appliquant le résultat  $\ln a^n = n \ln a$  dans le cas où  $a = e$ , on a  $\ln e^n = n \Leftrightarrow \ln e = n$  car  $\ln e = 1$

Par conséquent,  $\ln e^2 = 2$ ,  $\ln e^3 = 3$ ...

Application : Exercice 2

## IV Fonction logarithme décimal

Définition :

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée **log**, définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$