Nombres réels ($2^{ème}$ partie)

I Multiples et diviseurs…

1- … d'un nombre entier

Définition :

Soit a et b deux entiers relatifs.

Si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, alors il existe un entier k tel que $a = k \times b$.

Par conséquent :

– a est un multiple de b

– b est un diviseur de a

- On dit que a est divisible par b

Exemple : On sait que $6 \times 7 = 42$

42 est donc un multiple de 7 et 7 est un diviseur de 42 car $42 = 6 \times k$ avec $k = 7$

Propriété :

La somme de deux multiples de a est un multiple de a

Exemple : 10 et 6 sont des multiples de 2 car $10 = 2 \times 5$ et $6 = 2 \times 3$

Or, $10 + 6 = 16 = 2 \times 8$ donc 16 est aussi un multiple de 2

Propriété :

Un nombre entier possède un nombre fini de diviseur, mais un nombre infini de multiples.

Application : Exercices 1 à 4

2- Les critères de divisibilité

Remarque : on parle de critères de divisibilité quand le reste de la division euclidienne est nul.

Un nombre entier est :

divisible par…	…si et seulement si…
2	ce nombre est pair (fini par 0 / 2 / 4 / 6 / 8) Ex : **8** / 102**4** / 4872**6**
3	la somme de ses chiffres est divisible par 3 Ex : 894 → $8 + 9 + 4 = 21 = 7 \times \mathbf{3}$

4	si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 Ex : 1024 $\rightarrow 24 = 6 \times \mathbf{4}$
5	il se termine par 0 ou 5 Ex : **85** / **1470** / **3247895**
9	la somme de ses chiffres est divisible par 9 Ex : 5478327 $\rightarrow 5+4+7+8+3+2+7 = 36 = 4 \times \mathbf{9}$
10	il se termine par 0 Ex : **1540** / **70** / **649640**

II Les nombres pairs et impairs

Définition :

Les nombres entiers pairs sont les nombres divisibles par 2 (ou multiple de 2).

Les nombres entiers impairs sont les nombres qui ne sont pas divisibles par 2.

Propriétés :

— a est pair si et seulement s'il existe un entier k tel que $a = 2k$

— a est impair si et seulement s'il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$

Exemples :

- $124 = 2 \times k$ avec $k = 62$ car $2 \times 62 = 124$
- $401 = 2 \times k + 1$ avec $k = 200$ car $2 \times 200 + 1 = 401$

La parité de la somme de deux nombres entiers est définie par :

Parité du premier nombre		Parité du second nombre		Parité de la somme
Pair	$+$	Pair	$=$	Pair
Pair	$+$	Impair	$=$	Impair
Impair	$+$	Pair	$=$	Impair
Impair	$+$	Impair	$=$	Pair

La parité du produit de deux nombres entiers est définie par :

Parité du premier nombre		Parité du second nombre		Parité du produit
Pair	$\times$	Pair	$=$	Pair
Pair	$\times$	Impair	$=$	Pair
Impair	$\times$	Pair	$=$	Pair
Impair	$\times$	Impair	$=$	Impair

Propriété :

Le carré d'un nombre impair est impair

Application : Exercice 5

III Les nombres premiers

1- Définition et liste

Définition :

Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemple : 23 est un nombre premier puisqu'il n'est divisible que par 1 et 23.

Il n'est pas divisible par 2 (nombre impair), par 3 $(2+3=5)$, par 4 (nombre impair), par 5 (23 finit par 3) …

Remarques :

- 1 n'est pas un nombre premier puisqu'il n'admet qu'un seul diviseur (lui-même)
- La liste des nombres premiers est infinie

Liste des nombres premiers jusque 100 :

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

2- Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Exemple : $20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.

Cela signifie que chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique

Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Décomposer le nombre 300 en produits de facteurs premiers

Pour cela, il est important de connaître le début de la liste des nombres premiers. A chaque étape, on cherche à savoir si le nombre est divisible par 2. Si cela n'est pas le cas, on essaye avec 3. Tant que cela n'est pas possible, on continue dans l'ordre de la liste des nombres premiers.

300	2
150	

On commence donc par tester si 300 est divisible par 2. La réponse est « oui » car 300 se termine par un chiffre pair. Et on a : **300** ÷ 2 = 150

300	2
150	2
75	

On recommence en testant si 150 est divisible par 2.

La réponse est « oui » car **150** ÷ 2 = 75

300	2
150	2
75	3
25	

On recommence en testant si 75 est divisible par 2. Ici, c'est impossible.

On essaye donc de voir si 75 est divisible par 3. La réponse est oui car 75 ÷ 3 = 25

300	2
150	2
75	3
25	5
5	

On recommence en testant si 25 est divisible par 2. La réponse est non.

On essaye avec 3 mais cela n'est toujours pas possible.

On teste si 25 est divisible par 5. La réponse est oui car 25 ÷ 5 = 5

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

On recommence en testant si 5 est divisible par 2. La réponse est non.

On essaye avec 3 mais cela n'est toujours pas possible.

On teste si 5 est divisible par 5. La réponse est oui car 5 ÷ 5 = 1

La décomposition en facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite

300 = 2 x 2 x 3 x 5 x 5

Remarque : Pour des nombres « simples », la décomposition en facteurs premiers est un peu longue et inutile. On peut simplement utiliser les tables de multiplication et procéder directement à la décomposition en ligne

Exemple : 90 = 2 x 45 = 2 x 3 x 15 = 2 x 3 x 3 x 5

Application : Exercices 6 à 8