Nombres réels ($1^{ère}$ partie)

I Ensembles de nombres

1- Définitions

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des entiers positifs noté $\mathbb{N}$

Exemple : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4…

L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble des entiers positifs et négatifs ou nuls noté $\mathbb{Z}$

Exemple : 0 ; 1 ; -18 ; -3 ; 4…

L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a appartenant à $\mathbb{Z}$ et n appartenant à $\mathbb{N}$. Il est noté $\mathbb{D}$

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemple : 0,862 ; $\frac{3}{4}$; 2 ; $\sqrt{0{,}01}$…

L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$ et b non nul. Il est noté $\mathbb{Q}$

Exemple : $\frac{1}{3}$; $\frac{-9}{33}$; $\frac{11}{7}$ …

Démonstration au programme :

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal en passant par une démonstration « par l'absurde » en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal

S'il est décimal, alors il s'écrit sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

Or $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ ⇔ $3a = 10^n$

Donc 10^n est divisible par 3

Pour qu'un nombre soit divisible par 3, la somme de ses chiffres doit être divisible par 3.

Or quel que soit la valeur de n, la somme des chiffres de 10^n sera égale à 1, ce qui n'est pas divisible par 3

L'hypothèse de départ est donc fausse, $\frac{1}{3}$ n'est donc pas décimal.

L'ensemble des **nombres irrationnels** est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels et qui ne s'écrivent pas sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$ et b non nul.

Exemple : π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ …

L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble des nombres x tel que $x^2 \geq 0$ noté $\mathbb{R}$

Exemple : 0 ; $\frac{11}{7}$; $\sqrt{0{,}01}$; -3 ; $\sqrt{5}$…

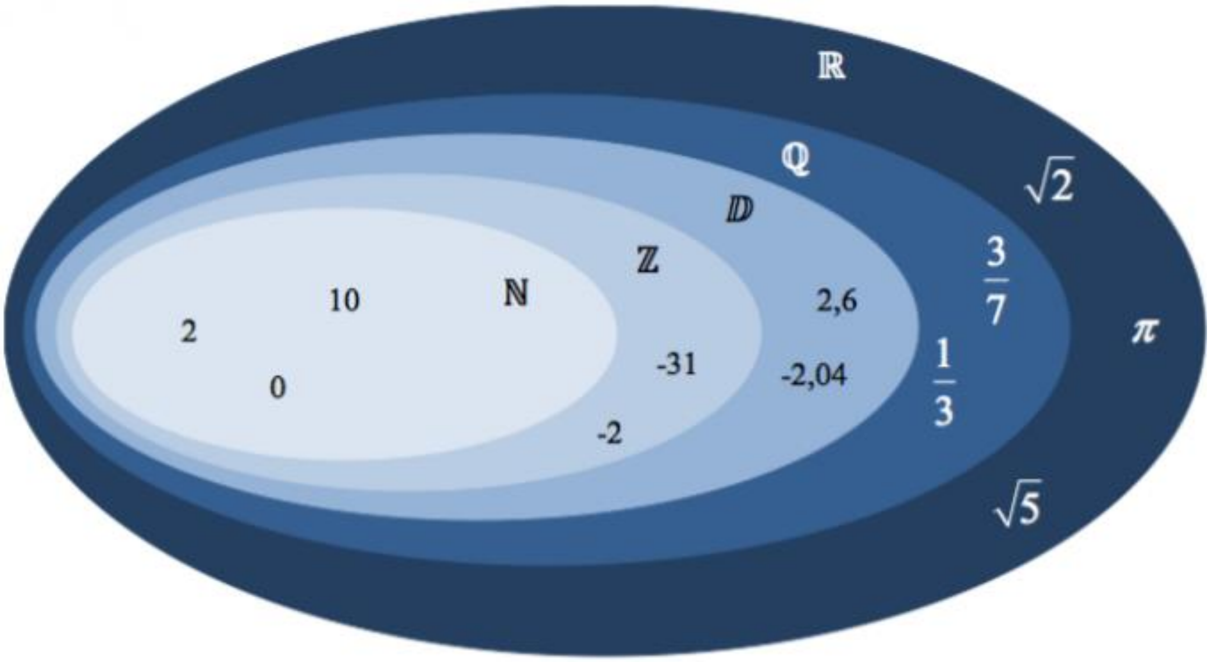
2- Classification des nombres

L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ qui eux-mêmes appartiennent à l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$…

On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Cela signifie que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$.

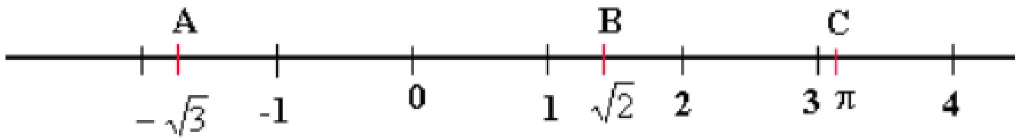
Propriété :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



3- Droite des réels

L'ensemble des nombres utilisés en seconde sont donc des réels. On considère qu'ils sont tous « mesurables ». Par conséquent, on peut représenter cet ensemble $\mathbb{R}$ par une droite graduée appelée droite des réels ou droite numérique. Tout point de cette droite a pour abscisse un nombre réel.



Ici les points A, B et C sont respectivement les points d'abscisse $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$ et π

Application : Exercices 1, 2 et 3

II Intervalles

1- Notations

Définitions :

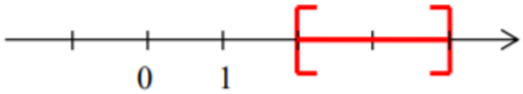
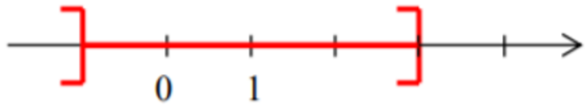
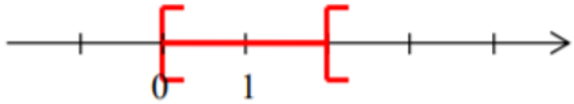
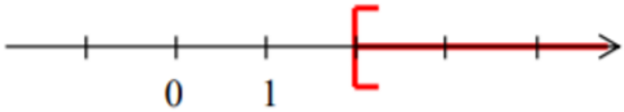
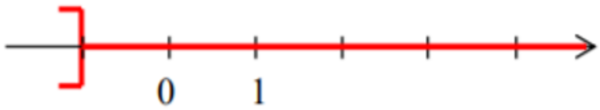
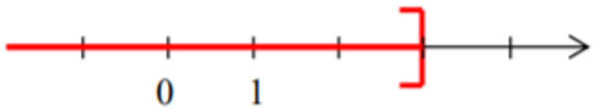
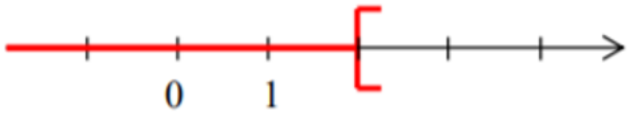
Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.

L'intervalle $]-\infty\,; b]$ (où le signe ∞ représente l'infini) est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq b$.

L'intervalle $[a\,;\,+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.

Chaque intervalle peut être représenté sur une droite graduée :

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2\,;4]$	
$-1 < x \leq 3$	$]-1\,;3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0\,;2[$	
$2 < x < 4$	$]2\,;4[$	
$x \geq 2$	$[2\,;\,+\infty[$	
$x > -1$	$]-1\,;\,+\infty[$	
$x \leq 3$	$]-\infty\,;3]$	
$x < 2$	$]-\infty\,;2[$	

Remarque : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui s'écrit $]-\infty\,;\,+\infty[$

2- Intervalles ouverts et fermés

On dit qu'un intervalle est fermé si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est ouvert dans le cas contraire.

Il peut également être semi-ouvert si l'une ou l'autre de ses extrémités appartient à l'intervalle.

Exemples :

$[2\,;\,5]$ est un intervalle fermé, donc 2 et π appartiennent à l'intervalle : $2 \leq x \leq 5$

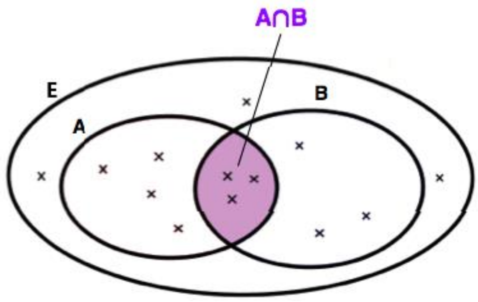
$]-2\,;\,7[$ est un intervalle ouvert, -2 et 7 n'appartiennent pas à l'intervalle : $-2 < x < 7$

$]-7\,;\,9]$ est un intervalle semi-ouvert, seul 9 appartient à cet intervalle : $-7 < x \leq 9$

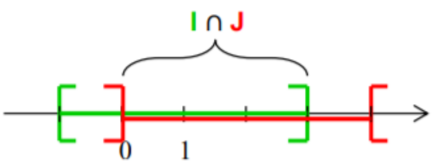
Applications : Exercices 4, 5 et 6

3- Réunion et intersection

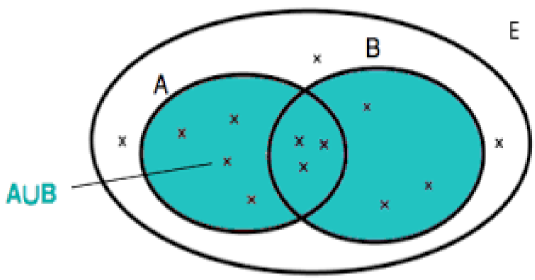
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ET à B. Elle est notée $A \cap B$ et se lit A inter B.



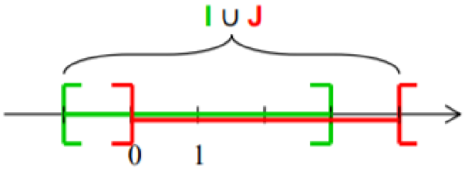
L'intersection peut aussi être représentée sur une droite graduée. Si on considère un intervalle $I = [-1\,;3]$ et un intervalle $J =]0;4[$, alors $I \cap J =]0\,;3]$



La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A OU à B. Elle est notée $A \cup B$ et se lit A union B.



La réunion peut aussi être représentée sur une droite graduée. Si on considère un intervalle $I = [-1\,;3]$ et un intervalle $J =]0;4[$, alors $I \cup J = [-1\,;4[$



Application : Exercice 7

III Valeurs absolues

Définition :

On appelle valeur absolue d'un nombre réel x la distance entre x et 0. On la note $|x|$

Soient a et b deux nombres réels. On appelle distance entre a et b le nombre $|a-b|$

Exemples :

- Si $x=2$, alors $|x|=2$
- Si $x=-5$, alors $|x|=5$
- Si $a=4$ et $b=-1.5$, alors $|4-(-1.5)|=5.5$

Propriétés : Soient x et y deux nombres réels	
1- $\|x\| \geq 0$	2- $\|-x\|=\|x\|$
3- $\sqrt{x^2}=\|x\|$	4- $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$
5- $\|x\|=\|y\| \Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$	6- $\|xy\|=\|x\|\times\|y\|$
7- $\left\|\frac{x}{y}\right\|=\frac{\|x\|}{\|y\|}$ pour $y\neq 0$	8- Si $\|x-a\|\leq r$ alors $x\in[a-r\,;a+r]$

Vidéo : Explications et application valeurs absolues

Application : Exercice 8